Henkivakuutussopimuksen tappio ja Hattendorffin lause

Elsa Hanninen

16.6.2020
Pro gradu -tutkielma
Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Koulutusohjelma — Utbildningsprogram — Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen maisteriohjelma

Tekijä — Författare — Author

Elsa Hanninen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Henkivakuutussopimuksen tappio ja Hattendorffin lause

Opintosuunta — Studieinrikting — Study track

Soveltava matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Kesäkuu 2020	63 sivua

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Vakuutussopimusten tappion arvioiminen on tärkeää vakuutusyhtiön riskienhallinnan kannalta. Tässä työssä esitellään Hattendorffin lause vakuutussopimuksen tappion odotusarvon ja varianssin arvioimiseksi sekä sovelletaan sen tuloksia monitilaisella Markov-prosessilla mallinnettavalle henkivakuutussopimukselle. Hattendorffin lauseen nojalla ekvivalenssiperiaatteen mukaan hinnoitellun vakuutussopimuksen erillisillä aikaväleillä syntyneiden tappioiden odotusarvo on nolla, ja tappiot ovat korreloimattomia, jonka seurauksena tappion varianssi voidaan laskea erillisillä aikaväleillä muodostuneiden tappioiden varianssien summana.

Työn soveltavana osana simuloidaan Markov-prosesseja sopivassa monitilaisessa mallissa mallintamaan henkivakuutussopimuksien realisaatioita. Tutkitaan, onko simuloitujen polkujen tuottamien vuosittaisten tappioiden keskiarvo lähellä nollaa, ja onko koko sopimusajan tappioiden varianssin arvo lähellä summaa vuosittaisten tappioiden variansseista. Lisäksi lasketaan simulaation asetelmalle Hattendorffin lauseen avulla teoreettiset vastineet ja verrataan näitä simuloituihin arvoihin.

Vakuutussopimus pitää karkeasti sisällään kahdenlaisia maksuja: vakuutusyhtiön maksamat korvausmaksut ja vakuutetun maksamat vakuutusmaksut. Vakuutussopimuksen kassavirta on jollain aikavälillä tapahtuvien vakuutuskorvausten ja -maksujen erotuksen hetkeen nolla diskontattu arvo. Vastuuvelka on määrittelyhetken jälkeen syntyvän, määrittelyhetkeen diskontatun, kassavirran odotusarvo. Vakuutussopimuksen tappio jollain aikavälillä määritellään kyseisen aikavälin kassavirran ja vastuuvelan arvonmuutoksen summana.

Kun määritellään stokastinen prosessi, joka laskee tietyllä hetkellä siihen mennessä kumuloituneet kustannukset sekä tulevan vastuuvelan nykyarvon, voidaan tappio ilmaista tämän prosessin arvonmuutoksena. Kyseinen prosessi on neliöintegroituva martingaali, jolloin Hattendorffin lauseen tulokset ovat seurausta neliöintegroituvien martingaalien arvonmuutoksen ominaisuuksista. Hattendorffin lauseen tulokset löydettiin jo 1860-luvulla, mutta martingaaliteorian hyödyntäminen on moderni lähestymistapa ongelmaan.

Esittämällä monitilaisella Markov-prosessilla mallinnettavan sopimuksen kustannukset Lebesgue-Stieltjes integraalina, saadaan tappion varianssille laskukelpoiset muodot. Markov-prosessilla mallinnettavilla sopimuksille voidaan johtaa erityistapaus Hattendorffin tuloksesta, missä tappiot voidaan allokoida eri vuosien lisäksi eri tiloihin liittyviksi tappioiksi.

Soveltavassa osiossa nähdään, että yksittäisinä sopimusvuosina syntyneiden tappioiden odotusarvot ovat lähellä nollaa, ja otosvarianssien summa lähestyy koko sopimusajan tappion otosvarianssia, mikä on yhtäpitävää Hattendorffin lauseen väitteiden kanssa. Simuloidut otosvarianssit eivät täysin vastaa teoreettisia vastineitaan.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Hattendorff, tappio, ylijäämä, vastuuvelka, Markov-prosessi

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto

Vakuutussopimusten tuottaman tappion tai ylijäämän arvioiminen on tärkeää vakuutusyhtiön riskienhallinnan kannalta. Tässä työssä esitellään Hattendorffin lause, jonka nojalla ekvivalenssiperiaatteen mukaan hinnoitellun vakuutussopimuksen erillisillä aikaväleillä syntyneiden tappioiden odotusarvo on nolla, ja tappiot ovat korreloimattomia, jonka seurauksena tappion varianssi voidaan laskea erillisillä aikaväleillä muodostuneiden tappioiden varianssien summana.

Henkivakuutussopimus

Vakuutus on vakuutuksenantajan, yleensä vakuutusyhtiön, ja vakuutuksenottajan välinen oikeussuhde, jolla vakuutettu pyrkii suojautumaan riskien varalle. Riski voi olla esimerkiksi vakuutetun varallisuuteen tai terveyteen kohdistuva. Vakuutuksenottaja maksaa vakuutusmaksun vakuutuksen myyvälle taholle ja riskin toteutuessa vakuutuksen myyjä maksaa rahallisen korvauksen. *Vakuutussopimus* on todiste vakuutuksen olemassaolosta, ja pitää sisällään tiedon vakuutuksenottajan sekä vakuutuksenantajan oikeudet sekä velvollisuudet. Olennaista vakuutuksissa on, että niillä suojattaviin riskeihin liittyy satunnaisuutta, jolloin korvauksien täsmällinen määrittely etukäteen ei ole mahdollista. Vakuutusten määrittelyyn liittyy tavallisesti myös vaade, että vakuutuksen antaja laatii sopimuksen usean vakuutetun kanssa, jolloin suurten lukujen lain nojalla riski tasaantuu. [14, luku 2.2]

Käsitteellä *henkivakuutus* tarkoitetaan tässä työssä sellaisia vakuutustyyppejä, joiden riskit ovat henkilön terveyttä tai toimintakykyä uhkaavia. Henkivakuutuksia on erilaisia. Esimerkiksi *kuolemanvaravakuutuksessa* edunsaajalle maksetaan korvaus, jos vakuutettu kuolee sopimuksessa määritellyn aikavälin sisällä. *Elämänvaravakuutuksessa* vakuutettu saa korvauksen, jos hän on elossa ennalta määrättynä ajanhetkenä. *Eläkevakuutuksessa* vakuutetulle maksetaan korvaus säännöllisesti toistuvissa erissä ennalta määrätyn ajan ylityttyä, mahdollisesti kuolemaan saakka. Henkivakuutussopimus voi olla yhdistelmä useasta eri henkivakuutuksesta.

Henkivakuutussopimuksen maksut ja hinnoittelu

Vakuutussopimuksen sisältämät maksut voidaan jakaa karkeasti kahteen luokkaan: vakuutuksenottajan maksamat vakuutusmaksut ja vakuutuksen myyjän maksamat korvaukset. Solmittaessa vakuutussopimus, vakuutettu luovuttaa vakuutusyhtiön käyttöön pääomaa, jota vakuutusyhtiö voi tietyin rajoittein sijoittaa eteenpäin tai käyttää muiden sopimuksien maksujen suorittamiseen. Luonnollisesti sopimukseen liittyy myös muita kuormituksia, kuten vakuutusyhtiön toimintaan liittyviä kuluja.

Henkivakuutussopimukset pyritään määrittelemään ja hinnoittelemaan niin, että ne ovat tuottoisia ja pieniriskisiä vakuutuksen myöntäjälle, mutta houkuttelevia eli tarpeeksi edullisia vakuutetulle. Vakuutettujen maksamien vakuutusmaksujen on katettava maksettavat korvaukset, liikekulukuormitukset eli vakuutusten hoitoon ja yhtiön hallintoon liittyvät kustannukset sekä varmuuslisät, joilla ylläpidetään vakuutuslaitoksen vakavaraisuutta. Sopimusten hinnoittelussa käytetään apuna ekvivalenssiperiaatetta, joka esitellään aliluvussa 2.3. Ekvivalenssiperiaatteessa kahden kassavirran pääoma-arvot asetetaan odotusarvotasolla yhtäsuuruisiksi. Yksinkertaisessa tapauksessa ekvivalenssiperiaate asettaa vakuutusyhtiön tulevaisuudessa maksamien korvausten ja vakuutetun yhtiölle maksamien vakuutusmaksujen odotusarvot yhtä suuriksi.

Henkivakuutussopimuksen hinnoitteluun vaikuttavia tekijöitä ovat muun muassa vakuutetun henkilön tai henkilöiden ikä ja jo tiedossa olevat sairaudet. Vuoden 2012 jälkeen kuluttajille tarjottavissa vakuutuksissa vakuutetun sukupuoli ei saa vaikuttaa vakuutusmaksujen ja -korvausten määrittelyyn [17].

Vakuutussopimuksen tappio

Vakuutussopimuksen rakenne on usein sellainen, että vakuutusmaksuja maksetaan heti sopimuksen synnystä lähtien säännöllisesti ennalta määriteltyinä ajanhetkinä, mutta korvauksia maksetaan vasta vahingon tapahtuessa ja sen laadusta riippuen. Tulevat vakuutuskorvaukset ovat tässä mielessä satunnaisia. Tulevien kassavirtojen odotusarvot eivät ole yhtä suuria enää sopimuksentekohetken jälkeen, vaikka sopimus olisikin hinnoiteltu ekvivalenssiperiaatteen nojalla.

Vakuutusyhtiön *vastuuvelalla* tarkoitetaan sen vakuutusmaksuvastuuta eli hetken t jälkeen vakuutusyhtiön maksamien korvausmaksujen ja vakuutetulta saatavien vakuutusmaksujen pääoma-arvojen erotuksen odotusarvoa. Vastuuvelka ei pidä sisällään korvausvastuuta, eli jo sattuneiden vahinkojen mahdollisia maksamattomia korvauksia. Vastuuvelka on suure, joka pyritään arvioimaan mahdollisimman tarkasti ja sitä varten varataan vakuutusyhtiön taseeseen varoja kattamaan tulevia kustannuksia. Vastuuvelka muuttuu ajan kuluessa sopimuksen maksujen realisoituessa, joten se lasketaan uudestaan säännöllisin väliajoin, esimerkiksi vuosittain. Sopimuksen päätyttyä vakuutusmaksuvastuu päättyy, eli vastuuvelka poistuu.

Henkivakuutussopimuksen jollain aikavälillä tuottama tappio kostuu kyseisellä aikavälillä maksettujen korvausten ja saatujen vakuutusmaksujen erotuksesta ja vastuuvelan muutoksesta. Kirjallisuuden määritelmät tappiolle vaihtelevat. Lähteestä riippuen tappiota kuvataan sekä positiivisena että negatiivisena suureena. Tässä työssä käytetään termiä tappio kuvaamaan maksettujen korvausten ja saatujen maksujen erotusta, mikä on vastaa esimerkiksi Norbergin artikkelin [10] esitystä. Mikäli erotus on negatiivinen, eli maksuja on saatu enemmän kun korvauksia on maksettu, on kyseessä voitto.

Hattendorffin lause

Hattendorffin lause on yksi henkivakuutusmatematiikan klassikoista. Lause on nimetty K. Hattendorffin mukaan, joka esitti lauseen tuloksen vuonna 1868. Ensimmäiset todistukset esitettiin kuitenkin vasta 1900-luvun puolella [15, s. 143]. Tässä työssä lauseelle esitetään myöhemmin kehitelty todistus, joka nojaa martingaaliteoriaan.

Hattendorffin lause toteaa, että henkivakuutussopimuksen erillisinä ajanhetkinä (esimerkiksi eri vuosina) synnyttämien tappioiden odotusarvo on nolla, ja erillisinä ajanhetkinä syntyneet tappiot ovat keskenään korreloimattomia. Lisäksi tappion varianssi voidaan laskea summana erillisten ajanhetkien variansseista. Esimerkiksi kymmenen vuoden mittaisen sopimuksen tappion varianssi voidaan laskea summana jokaisen vuoden tappion variansseista.

Hattendorffin lauseen tulokset seuraavat tavasta määritellä tappio. Voidaan osoittaa, että tappiota kuvaava stokastinen prosessi on neliöintegroituva martingaali, kun se määritellään koostuvan aikavälillä syntyneestä nettokassavirrasta sekä vastuuvelan muutoksesta. Lauseen väitteet seuraavat neliöintegroituvien martingaalien ominaisuuksista.

Työn alkupuolella käsitellään lyhyesti henkivakuutusmatematiikan perusteita sekä käydään läpi työn kannalta keskeisimpiä käsitteitä, kuten tappio ja vastuuvelka. Todennäköisyysteoriasta käsitellään oleellisimmat käsitteet sekä tulokset. Luvussa 4 esitetään Hattendorffin lause yleisessä tapauksessa ja luvussa 5 keskitytään lauseen soveltamiseen Markovin prosessilla mallinnettavalle henkivakuutussopimukselle.

Työn päälähteenä on kaksi Scandinavian Actuarial Journalissa julkaistua artikkelia: Ragnar Norbergin vuonna 1992 julkaistu artikkeli *Hattendorff's theorem and Thiele's differential equation generalized* [10], sekä Henrik Ramlau-Hansenin vuonna 1988 julkaistu artikkeli *Hattendorff's Theorem: A Markov chain and counting process approach* [15].

2 Henkivakuutusmatematiikkaa

Tässä luvussa määritellään joitain henkivakuutusmatematiikan peruskäsitteitä. Luvun määritelmät löytyvät teoksesta Henkivakuutusmatematiikkaa (Pesonen, Soininen ja Tuominen, 2000) [13] sekä Helsingin yliopiston Life insurance mathematics I -kurssin luentomuistiinpanoista (Nyrhinen, 2018) [12]. Lisäksi luvun lähteenä on käytetty Rantalan ja Pentikäisen teosta Vakuutusoppi [14].

2.1 Rahaston nykyarvo

Korko on rahalainan hinta. Rahalainassa jokin taho luopuu käytettävissään olevasta rahasummasta tulevaisuudessa maksettavaa (yleensä suurempaa) rahasummaa vastaan. Korko on näiden rahasummien erotus.

Olkoon $B = B(0)$ jonkin rahaston arvo hetkellä 0 ja olkoon t positiivinen ja äärellinen kokonaisluku. Nyt i_t on vallitseva *vuosikorko* vuonna j. Rajoitutaan tilanteisiin, joissa korko on ei-negatiivinen, eli oletetaan, että $i_t \geqslant 0$. Rahaston arvo hetkellä 1 on

$$B(1) = (1 + i_1)B(0).$$

Rahaston arvo t vuoden päästä on

$$B(t) = (1 + i_1)(1 + i_2)\dots(1 + i_t)B(0)\ .$$

Jos vuosikorko i on vakio koko tarkasteluajalla, niin rahaston arvo hetkellä t voidaan laskea yksinkertaisemmin,

$$B(t) = (1 + i)^t B(0).$$

Tällöin tekijä $(1 + i)$ kutsutaan *korkokertoimeksi.*

Korkouttamisen vastatoimenpide on *diskonttaus*. Olkoon i vallitseva (vakio) vuosikorko. Rahaston arvosta hetkellä t voidaan laskea hetken nolla *nykyarvo* tai *pääoma-arvo* korkotekijän avulla

$$B(0) = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t B(t).$$

Tekijää $\frac{1}{1+i}$ kutsutaan *diskonttauskertoimeksi* ja merkitään yleensä kirjaimella v.

Esimerkki 2.1. Olkoon i vallitseva vuosikorko ja v sitä vastaava diskonttauskerroin. Jos vastapuoli tarjoaa hetkellä t rahalainasta vastineeksi määrän $B(t)$, niin hetkellä 0 lainaksi annettavan rahamäärän ei kannata olla suurempi kuin $v^t B(t)$ kun oletetaan, että vallitseva vuosikorko on positiivinen.

2.2 Jatkuva korkoutuvuus ja jatkuvat kassavirrat

Nykyarvojen avulla voidaan tutkia ja vertailla eri ajanhetkinä tapahtuvien maksujen ja kassavirtojen suuruutta. Jatkuvan korkoutuvuuden käsite mahdollistaa sen, että nykyarvo voidaan laskea mielivaltaiselle (äärelliselle) aikavälille.

Määritelmä 2.1. Olkoon i vallitseva vuosikorko. Sitä vastaava *m. osavuoden nimelliskorko* $i^{(m)}$, eli korko vuoden $\frac{1}{m}$ suuruiselle osalle (esimerkiksi $\frac{1}{12}$ tai $\frac{1}{365}$), määritellään yhtäsuuruudesta

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i.$$

Määritelmä 2.2. Vuosikorkoa i vastaava *jatkuva vakiokorko tai vakiokorkoutuvuus* δ määritellään raja-arvona m. osavuoden nimelliskorosta, kun vuosi jaetaan äärettömän moneen osaan

$$\delta := \lim_{m\to\infty} i^{(m)}.$$

Propositio 2.1. *Olkoon vallitseva vuosikorko vakio i. Vakiokorkoutuvuudelle* δ *pätee*

$$\delta = \ln(1 + i)\ .$$

Nyt korkoutuvuus- ja diskonttauskertoimet voidaan ilmaista vakiokorkoutuvuuden avulla

$$1 + i = e^{\delta} \text{ ja } v = e^{-\delta}.$$

Todistus. Pesonen, Soininen, Tuominen [13, s. 5]. □

Sopimusta tehdessä korko voidaan kiinnittää koko sopimusajaksi. Tällöin diskonttaus ja korkouttaminen ovat yksinkertaisia laskuja, kun korko- ja diskonttauskertoimet tunnetaan. Korko voi myös olla sidottu viitekorkoon tai määräytyä ajan funktiona.

Määritelmä 2.3. Olkoon δ paloittain jatkuva funktio välillä $I \in \mathbb{R}$. Jos on olemassa sellainen paloittain derivoituva ja jatkuva rahasto $B(t)$, että kaikille $t \in I$, lukuun ottamatta funktion δ epäjatkuvuus- ja rahaston B epäderivoituvuuspisteitä,

$$B'(t) = \delta(t)B(t),$$

niin $\delta(t)$ on *jatkuva korkoutuvuus* hetkellä t.

Propositio 2.2. *Olkoon* $\delta(s)$ *korkoutuvuus välillä* $[t, u]$. *Tällöin*

$$B(t) = e^{-\int_t^u \delta(s)ds} B(u)$$

on määritelmän 2.3 mukainen rahasto.

Todistus. Pesonen, Soininen, Tuominen [13, s. 6]. □

Edellisen proposition nojalla, rahaston B hetkestä u hetkeen t diskontattua arvoa merkitään

$$B(t) = v(t,u)B(u),$$

missä $v(t,u) = e^{-\int_t^u \delta(s)ds}$ ja $\delta(s)$ on korkoutuvuus välillä $[t,u]$. Jos korko on vakio i, niin diskonttauskerroin on

$$v(t,u) = e^{i(u-t)}.$$

Huomautus 2.1. Diskontatessa hetkeen nolla käytetään yksinkertaistettua merkintää $v(t)$ merkinnän $v(0,t)$ sijaan.

Määritelmä 2.4. Olkoon B jatkuva ja paloittain derivoituva rahasto ja δ paloittain jatkuva korkoutuvuus. Rahastoon B maksettava, *jatkuva kassavirta* A on jollain välillä $[0,n]$ paloittain jatkuva funktio, joka toteuttaa kyseisellä välillä funktioiden δ ja A jatkuvuuspisteissä differentiaaliyhtälön

$$B'(t) = \delta(t)B(t) + A(t).$$

Jatkuvan kassavirran A pääoma-arvo hetkellä t on

$$\int_t^u v(t,s)A(s)ds.$$

2.3 Ekvivalenssiperiaate ja sopimuksen kassavirta

Ekvivalenssiperiaatetta on perinteisesti käytetty sopimusten hinnoittelussa, mutta EU-direktiivien mukaiseksi muutettu vakuutusyhtiölaki ei edellytetä hinnoittelemaan sopimuksiaan ekvivalenssiperiaatteen nojalla, vaan vakuutusyhtiö voi määritellä maksun oman harkintansa mukaan, tiettyjä sääntöjä noudattaen [14, s. 214].

Määritelmä 2.5 (Ekvivalenssiperiaate)**.** Kaksi samalla korko-oletuksella varustettua kassavirtaa ovat ekvivalentit, mikäli niiden pääoma-arvot ovat yhtä suuret. Vakuutussopimuksen sanotaan olevan hinnoiteltu ekvivalenssiperiaatteen nojalla jos vakuutetun maksamien vakuutusmaksujen sekä vakuutusyhtiön maksamien korvausten nykyarvojen odotusarvot sopimuksen tekohetkellä, ovat yhtä suuret.

Havainnollistetaan ekvivalenssiperiaatetta esimerkillä. Ennen sitä määritellään satunnaismuuttuja kuvaamaan vakuutetun jäljellä olevaa elinaikaa.

Määritelmä 2.6. Satunnaismuuttuja T_x kuvaa x-vuotiaan henkilön jäljellä olevaa elinaikaa. Todennäköisyyttä, että x-ikäinen henkilö on elossa t vuoden päästä merkitään henkivakuutusmatematiikassa lyhenteellä ${}_tp_x$, missä

$${}_tp_x = \mathbb{P}\left(T_x > t\right).$$

Esimerkki 2.2 (Elämänvaravakuutus)**.** Olkoon vakuutettu x-vuotias sopimuksentekohetkellä ja olkoon vakuutussopimuksen kesto on t vuotta. Vakuutusmaksua maksetaan P euroa vuodessa, ensimmäinen maksu tapahtuu hetkellä 1 ja maksut jatkuvat sopimuksen päättymiseen (tai kuolemaan saakka). Vakuutusyhtiö maksaa vakuutetulle korvauksen S mikäli vakuutettu on elossa sopimuksen päättyessä. Olkoon vuosittainen korkoutuvuus vakio ja v sitä vastaava diskonttauskerroin. Vakuutussopimuksen korvaus on

$$S\mathbb{1}\left(T_x > t\right) = \begin{cases} S, \text{ jos } T_x > t \\ 0, \text{ jos } T_x \leq t. \end{cases}$$

Korvauksen nykyarvon odotusarvo

$$\mathbb{E}\left[v^t S\mathbb{1}\left(T_x > t\right)\right] = v^t S_t p_x,$$

sillä

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left(T_x > t\right)\right] = {}_tp_x.$$

Vakuutusmaksu P maksetaan kerran vuodessa sopimuksen ollessa voimassa ja vakuutusmaksujen odotusarvo on

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{t} v^i P\mathbb{1}\left(T_x > i\right)\right] = P\sum_{i=1}^{t} v^i{}_ip_x.$$

Kun sopimus hinnoitellaan (yksinkertaisesti) ekvivalenssiperiaatteen nojalla, vakuutusmaksun P suuruus voidaan määritellä yhtälöstä

$$P = \frac{v^t S_t p_x}{\sum_{i=1}^{t} v^i{}_ip_x}.$$

Määritelmä 2.7. Olkoon $n < \infty$. Vakuutussopimuksessa välillä $(0, n]$ synnyttämien korvausten ja maksujen erotuksen, eli *kassavirran*, nykyarvoa merkitään suureella $K(n)$. Välillä $(t, n]$ syntyvän kassavirran nykyarvo saadaan erotuksesta

$$K(t, n) = K(n) - K(t).$$

Esimerkki 2.3. Yksinkertaisessa kassavirrassa suoritetaan vuosittain 1 yksikön suuruinen maksu. Ensimmäinen suoritus tehdään yhden vuoden päästä sopimuksen alkamisesta. Olkoon v diskonttauskerroin. Nyt kassavirran pääoma-arvo hetkellä 0 eri tarkasteluhetkinä on

$$K(1) = v,\ K(2) = v + v^2,\ K(3) = v + v^2 + v^3,\ K(4) = v + v^2 + v^3 + v^4,\ \ldots$$

Välillä $(2, 4]$ suoritetaan kaksi maksua, vuosina 3 ja 4. Tällä välillä syntyneen kassavirran nykyarvo saadaan erotuksena

$$K(2, 4) = K(4) - K(2) = \big(v + v^2 + v^3 + v^4\big) - \big(v + v^2\big) = v^3 + v^4\ .$$

Esimerkki 2.4. Merkitään vakuutussopimuksen vakuutusmaksuja ja korvauksia jatkuvina ei-satunnaisina funktioina $\overline{P}(t)$ ja $\overline{S}(t)$, missä $t \in [0, \infty)$. Kun $n < \infty$, vakuutuskorvausten ja vakuutusmaksujen nettonykyarvojen erotus välillä $(t, n]$ on

$$\begin{aligned}
K(t, n) &= K(n) - K(t) \\
&= \int_0^n v(u) \left[\overline{S}(u) - \overline{P}(u)\right] du - \int_0^t v(u) \left[\overline{S}(u) - \overline{P}(u)\right] du \\
&= \int_t^n v(u) \left[\overline{S}(u) - \overline{P}(u)\right] du.
\end{aligned}$$

Tarkasteluhetkellä tunnetaan kassavirran aiempien ja sen hetkisen suorituksen sekä korkokannan suuruus. Tuleva korkokanta ja suoritukset voivat olla satunnaisia. Siksi yllä määritelty kassavirta voi (tarkasteluhetkestä riippuen) olla satunnainen.

Huomautus 2.2. Tässä työssä korkoutuvuus- ja diskonttaustekijät oletetaan deterministisiksi, eli tunnetuiksi ja ei-satunnaisiksi.

2.4 Vakuutussopimuksen vastuuvelka ja tappio

Määritelmä 2.8. Oletetaan että vakuutussopimus alkaa hetkellä 0 ja päättyy hetkellä n, missä $n \in (0, \infty)$ ja oletetaan, että sopimus on voimassa hetkellä t, kun $t \in (0, n)$. Sopimuksen (prospektiivinen) vastuuvelka hetkellä t on tulevan nettokassavirran nykyarvon odotusarvo. Epätäsmällisesti yhtälö voidaan havainnollistaa erotuksena

$$\begin{aligned}
V(t) = &\ \text{tulevien korvausten nykyarvon odotusarvo} \\
&- \text{tulevien maksujen nykyarvon odotusarvo.}
\end{aligned}$$

Määritelmän 2.7 avulla vastuuvelka voidaan määritellä yhtäsuuruudella

$$V(t) = \frac{1}{v(t)} \mathbb{E}\left[K(t, n)\right],$$

missä odotusarvo on hetkestä t sopimuksen päättymiseen asti syntyvän nettokassavirran nykyarvon odotusarvo, joka korkoutetaan tarkasteluhetkeen t.

Vastuuvelka voidaan määritellä vain silloin, kun sopimus on voimassa. Sopimuksen päättyessä vakuutusmaksuvastuu päättyy, eli

$$V(n) = 0.$$

Joissain vakuutustyypeissä sopimus päättyy kuoleman hetkellä, jolloin vakuutusmaksuvastuu myös päättyy. Jos vakuutussopimus on hinnoiteltu ekvivalenssiperiaatteen nojalla, niin

$$V(0) = 0,$$

sillä sopimuksen korvausten ja maksujen nykyarvot on asetettu yhtä suuriksi.

Huomautus 2.3. Yllä vastuuvelka on määritelty prospektiivisesti, eli tulevaisuuden perusteella. Toinen tapa määritellä vastuuvelka on retrospektiivisesti. Retrospektiivinen vastuuvelka on kertyneiden korvausten ja saatujen vakuutusmaksujen nykyarvojen erotus. Jos käytettävä korkoutuvuus on sama, niin retrospektiivinen ja prospektiivinen vastuuvelka ovat yhtäsuuret.

Huomautus 2.4. Vastuuvelka määritellään aina ekvivalenssiyhtälöä käyttäen, vaikka sopimusta ei hinnoiteltaisi ekvivalenssiperiaatteen nojalla.

Vakuutussopimuksen tappio

Vakuutussopimuksen jollain aikavälillä tuottama tappio kostuu aikavälillä tapahtuvien maksujen erotuksen lisäksi vastuuvelan muutoksesta kyseisellä aikavälillä. Jokaista sopimusta kohden yhtiön on varattava vastuuvelan verran rahaa tulevia korvauksia varten. Mikäli vastuuvelan arvo kasvaa, lasketaan tämä yhtiön kokemaksi tappioksi.

Määritelmä 2.9. Olkoot t ja u positiivisia ja äärellisiä reaalilukuja. Oletetaan että vakuutussopimus on voimassa hetkellä u. Olkoon $K(t, u)$ määritelmän 2.7 mukainen kassavirtojen nettonykyarvojen erotus ja $V(t)$ sekä $V(u)$ määritelmän 2.8 mukaiset vastuuvelat määriteltyinä hetkinä t ja u. Välillä $(t, u]$ vakuutussopimuksen synnyttämä tappion nettonykyarvo on

$$L(t, u) = K(t, u) + v(u)V(u) - v(t)V(t).$$

Mikäli $L(t, u)$ saa positiivisen arvon, on vakuutuksen myöntäjä menettänyt varojaan kyseisellä aikavälillä. Jos arvo on negatiivinen, on yhtiölle kertynyt ylijäämää. Tappion määritteleminen vaatii siis, että vastuuvelat tarkasteltavan aikavälin alussa ja lopussa on määritelty. Mikäli tappiolle halutaan numeerinen arvo, on vastuuvelat ratkaistava.

Thielen differentiaaliyhtälöt

Thielen differentiaaliyhtälöt ovat keino arvioida vastuuvelan suuruuden muutosta pienellä aikavälillä. Ratkaisemalla differentiaaliyhtälö, saadaan vastuuvelalle käyttökelpoinen muoto vastuuvelan alku- ja loppuarvojen lisäksi. Esitellään nyt Thielen differentiaaliyhtälö yksinkertaiselle kuolemanvaravakuutukselle. Eksakti todistus kuolemanvaravakuutuksen Thielen yhtälölle on löydettävissä esimerkiksi Helsingin yliopiston Life insurance mathematics II -kurssin luentomuistiinpanoista (Lehtomaa, 2019) [8, s. 8-9]. Esimerkkiä varten määritellään kuolevuusintensiteetti ja sen yhteys selviytymistodennäköisyyteen.

Määritelmä 2.10. Oletetaan että x-ikäisen vakuutetun jäljellä olevaa elinaikaa mallinnetaan satunnaismuuttujalla T_x , joka on määritelty kuten määritelmässä 2.6. Kuolevuus tai kuolevuusintensiteetti iässä x on

$$\mu(x) = \lim_{\Delta \to 0+} \frac{{}_{\Delta}q_x}{\Delta},$$

missä

$${}_tq_x = 1 - {}_tp_x = \mathbb{P}\left(T_x \leq t\right).$$

Todennäköisyyttä ${}_tq_x$ kutsutaan kuolevuustodennäköisyydeksi.

Lemma 2.1. *Olkoon $F_x(t)$ satunnaismuuttujan T_x kertymäfunktio ja olkoon $F(t) = F_0(t)$. Kaikille $t \geq 0$ ja $x \geq 0$ siten että $F(x+t) < 1$ pätee,*

$${}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)ds}.$$

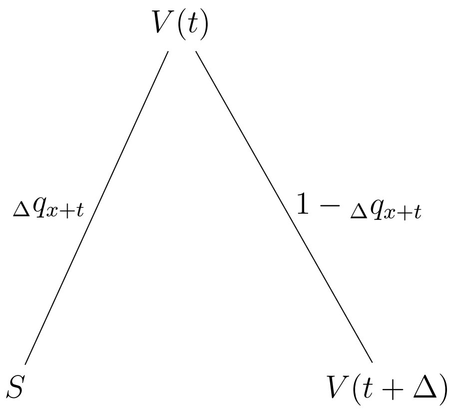
Todistus. Luentomuistiinpanot Nyrhinen [12, s. 20-21]. □

Esimerkki 2.5. Oletetaan, että kuolemanvaravakuutus alkaa hetkellä 0 ja päättyy hetkellä n, missä n on äärellinen ja positiivinen reaaliluku. Olkoon vakuutetun ikä sopimuksen alkaessa x vuotta. Vakuutettu maksaa nettokertamaksun P välittömästi hetken 0 jälkeen, ja vakuutetulle maksetaan kertakorvaus S, jos hän kuolee ennen sopimuksen päättymishetkeä n. Oletetaan, että nettokertamaksu P on määritelty ekvivalenssiperiaatteen mukaan. Oletetaan lisäksi, että kuolevuusintensiteetti $\mu(x)$ ja korkoutuvuus $\delta(t)$ ovat jatkuvia funktioita.

Propositio 2.3. *Esimerkin 2.5 mukaisen vakuutuksen Thielen differentiaaliyhtälö on*

$$V'(t) = (\delta(t) + \mu(x+t)V(t)) - S\mu(x+t).$$

Todistus. Tarkka todistus löytyy esimerkiksi luentomuistiinpanoista Lehtomaa [8, s. 9-14]. □



Kuva 2.1: Kuvan vasen viiva edustaa tilannetta, jossa vakuutettu kuolee aikvälillä $[t, t+\Delta)$, mikä tapahtuu todennäköisyydellä ${}_{\Delta}q_{x+t}$, ja tällöin maksetaan korvaus S (olettaen, että $t + \Delta < n$). Oikea viiva kuvaa tilannetta jossa vakuutettu on elossa hetkellä $t + \Delta$. Tällöin vastuuvelan arvo $V(t + \Delta)$ määritellään uudestaan hetkellä $t + \Delta$.

Havainnollistetetaan esimerkin 2.5 thielen yhtälön muodostamista kuvalla. Kuva 2.1 on luentomuistiinpanojen Lehtomaa [8] motivoimana piirretty kaavio, joka kuvaa vastuuvelan muutosta lyhyellä aikavälillä. Vastuuvelan arvoa voidaan approksimoida yhtälöllä

$$V(t) \approx \mu(x+t)\Delta S + (1 - \delta(t)\Delta)\,(1 - \mu(x+t)\Delta)\, V(t+\Delta),$$

missä $\mu(x + t)\Delta$ approksimoi todennäköisyyttä ${}_{\Delta}q_{x+t}$ ja $1 - \delta(t)\Delta$ diskonttaustekijää $v(t, t+\Delta)$. Ensimmäiseen termiin ei lisätä diskonttaustekijää, koska sen ajatellaan olevan hyvin lähellä arvoa 1. Nyt yhtälöä voidaan sieventää

$$\begin{aligned} V(t) \approx& \mu(x+t)\Delta S + (1 - \delta(t)\Delta)\,(1 - \mu(x+t)\Delta)\, V(t+\Delta) \\ \approx& \mu(x+t)\Delta S + V(t+\Delta) - V(t+\Delta)\Delta\,(\delta(t) + \mu(x+t)) \\ &+ \Delta^2 \mu(x+t)\delta(t)V(t+\Delta). \end{aligned}$$

Järjestämällä termit uudelleen ja tutkimalla raja-arvoa, kun $\Delta \to 0+$, saadaan

$$V'(t) = -\mu(x+t)S + V(t)\,(\delta(t) + \mu(x+t))\,.$$

Yhtälön reunaehdot ovat $V(0+) = P$ ja $V(n-) = 0$. Sopimuksen alussa tulevien maksujen ja korvausten nykyarvojen odotusarvot ovat yhtä suuret. Heti sopimuksen alkaessa maksetaan nettokertamaksu P, ja sillä hetkellä tulevien korvausten odotusarvo on yhtä suuri kertamaksun P kanssa ekvivalenssiperiaatteen nojalla. Sopimuksen päättyessä vakuutusmaksuvastuu päättyy ja vastuuvelka on nolla.

3 Todennäkösyysteoriaa ja muita esitietoja

Jotta voidaan mallintaa vakuutussopimusta työn tuloksen vaatimalla tavalla, on käytävä läpi todennäköisyysteorian käsitteitä sekä tuloksia. Määritelmät ja tulokset löytyvät esimerkiksi luentomonisteista Izyurov [5] ja Sottinen [16]. Stokastisten prosessien määritelmissä ja merkinnöissä seurataan luentomonisteita Nyrhinen [12] ja Lehtomaa [8].

Mitta-avaruus on kolmikko $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, missä Ω on jokin joukko, $\mathcal{F}$ on sigma-algebra kyseisellä joukolla ja μ on joukkoon Ω liittyvä mitta. Mitta-avaruus on σ-äärellinen, jos on olemassa joukot $\Omega_i \in \Omega$, joille $\mu(\Omega_1) < \infty$ ja $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty}\Omega_i$. Mitta-avaruus on *täydellinen* jos jokaisen nollamitallisen joukon jokainen osajoukko on myös mitallinen sigma-algebran $\mathcal{F}$ suhteen. Formaalisti jos $B \in \mathcal{F}$ ja $\mu(B) = 0$, niin kaikille $A \subset B$ pätee $A \in \mathcal{F}$. Jos $\mu(\Omega) = 1$, niin mitta μ on todennäköisyysmitta ja sille käytetään merkintää $\mathbb{P}$.

Huomautus 3.1. Jatkossa oletamme käsiteltävät todennäköisyysavaruudet täydellisiksi.

Määritelmä 3.1. Satunnaismuuttujan X sanotaan olevan integroituva, jos sen odotusarvolle pätee

$$\mathbb{E}|X| < \infty$$

ja neliöintegroituva, jos

$$\mathbb{E}|X|^2 < \infty.$$

Neliöintegroituva satunnaismuuttuja on myös integroituva. Näin ollen neliöintegroituvan satunnaismuuttujan varianssi on olemassa ja on äärellinen.

Propositio 3.1 (Dominoidun konvergenssin lause). *Olkoon (f_n) jono integroituvia funktioita, missä $n \in \mathbb{N}$, joille pätee*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \ m.v.$$

Jos $|f_n(t)| \leq h(t)$ m.v., missä h on integroituva, niin

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dg(t) = \int_a^b f(t)dg(t).$$

Erityisesti, olkoot X ja Y integroituvia satunnaismuuttujia ja X_n jono satunnaismuuttujia. Jos $X_n \to X$ melkein varmasti ja $|X_n| \leq Y$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

Todistus. Esimerkiksi luentomuistiinpanot [16, s. 32-34]. □

Huomautus 3.2. Ilmaisu 'melkein varmasti' (m.v.) tarkoittaa, että jokin pätee kaikille paitsi (mahdollisesti) nollamitalliselle joukolle.

Proposito 3.1 antaa ehdot sille, milloin integraalin ja raja-arvon paikkoja voidaan vaihtaa. Lauseella on myös hyödyllinen seuraus: Jos satunnaismuuttujat X_n ovat integroituvia, niin odotusarvo niiden summasta voidaan laskea summana odotusarvoista.

Korollaari 3.1. *Olkoon X_n, $n \in \mathbb{N}$, jono satunnaismuuttujia. Jos $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty$, niin $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ suppenee melkein varmasti ja*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[X_n\right].$$

Todistus. Luentomuistiinpanot [16, s. 34]. □

Propositio 3.2. *Fubinin lause. Olkoot $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ ja $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ täydellisiä σ-äärellisiä mitta-avaruuksia. Jos $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ on $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ mitallinen ja $\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f| d\left(\mu_1 \otimes \mu_2\right) < \infty$, niin*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\left(\omega_1, \omega_2\right) d\left(\mu_1 \otimes \mu_2\right) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f\left(\omega_1, \omega_2\right) d\mu_2\left(\omega_2\right)\right) d\mu_1\left(\omega_1\right) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f\left(\omega_1, \omega_2\right) d\mu_1\left(\omega_1\right)\right) d\mu_2\left(\omega_2\right).\end{aligned}$$

Todistus. Luentomuistiinpanot [5, s. 20-21] □

Fubinin lause tarkoittaa, että jos funktio f on integroituva (2-ulotteisen integraalin suhteen), niin se voidaan laskea 1-ulotteisina integraaleina, ja niiden järjestystä voi vaihtaa. Erityisesti integroituvien satunnaismuuttujien tapauksessa odotusarvon ja integraalin paikkaa voidaan vaihtaa.

3.1 Stokastinen prosessi

Henkivakuutussopimuksen kehitystä voidaan kuvata stokastisena prosessina. Henkivakuutussopimusten mallintamista stokastisina prosesseina, erityisesti Markovin prosesseina, tarkastellaan tarkemmin luvussa 5.

Määritelmä 3.2. *Stokastinen prosessi* on kokoelma samalla todennäköisyysavaruudella määriteltyjä satunnaismuuttujia, joka määräytyy kun indeksijoukon T jokaiseen alkioon t liitetään satunnaismuuttuja $Z(t)$. Satunnaismuuttujat saavat arvonsa samalla mitallisella tilajoukolla E. *Jatkuva-aikainen stokastinen prosessi* on kokoelma satunnaismuuttujia $\{Z(t)\}$, jossa indeksijoukko T on väli reaaliakselilla ($T \subset \mathbb{R}$).

Tässä työssä stokastisia prosesseja tutkitaan ajan suhteen, jolloin mahdollinen indeksijoukko löytyy joltakin välin $[0, \infty)$ osaväliltä, jolle käytetään jatkossa merkintää $\mathbb{R}_+$. Tilajoukkojen osalta rajoitumme tutkimaan äärellisiä, luonnollisista luvuista koostuvia tilajoukkoja, eli $E = \{1, 2, \ldots, N\}$, missä $N < \infty$.

Määritelmä 3.3. Olkoon $s, t \in T$, $\mathcal{F}$ sigma-algebra ja $\{\mathcal{F}_t\}$ kasvava jono sen alisigma-algebroita, eli

$$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \text{ kaikilla } t \in T, \text{ ja } \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \text{ kaikilla } s \in T, \text{ jos } s < t.$$

Jonoa $\{\mathcal{F}_t\}$ kutsutaan *filtraatioksi*. Stokastinen prosessin $\{Z(t)\}$ sanotaan olevan *sopiva* filtraation $\{\mathcal{F}_t\}$ suhteen, jos $Z(t)$ on $\mathcal{F}_t$-mitallinen kaikilla $t \in T$.

Oletetaan jatkossa, että filtraatio $\{\mathcal{F}_t\}$ on oikealta jatkuva, eli

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \cap_{t<s}\mathcal{F}_s.$$

Määritelmä 3.4. Stokastisen prosessin $Z(t)$ generoima sigma-algebra $\mathcal{F}_t$ määräytyy prosessin arvoista hetkeen t asti

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(Z(s), s \leq t\right).$$

Tämä on pienin filtraatio, jonka suhteen prosessi $\{Z(t)\}$ on sopiva.

Huomautus 3.3. Filtraatiosta käytetään myös nimeä historia, kun indeksijoukkona on aika. Jatkossa, mikäli filtraatiota ei erikseen määritellä, sen oletetaan olevan prosessin siihenastinen historia, eli prosessin generoima sigma-algebra.

Määritelmä 3.5. Olkoon $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\left(Z(s), s < t\right)$ stokastisen prosessin $Z(t)$ hetkeen t asti generoima historia (joka ei ota huomioon arvoa $Z(t)$). Stokastinen prosessi $\{Z(t)\}$ *ennustettava*, jos $Z(t)$ on $\mathcal{F}_{t-}$ mitallinen kaikilla t.

Määritelmä 3.6. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$. Stokastisen prosessin $\{Z(t)\}$ sanotaan olevan neliöintegroituva välillä $[a, b]$, jos satunnaismuuttuja $Z(t)$ on neliöintegroituva kaikilla $t \in [a, b]$.

3.2 Ehdollinen odotusarvo

Määritelmä 3.7. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus, X integroituva satunnaismuuttuja ja olkoon $\mathcal{G}$ sigma-algebran $\mathcal{F}$ alisigma-algebra. *Ehdollinen odotusarvo* $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]$ on sellainen $\mathcal{G}$-mitallinen satunnaismuuttuja, jolle pätee

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A X\right]$$

kaikilla $A \in \mathcal{G}$.

Propositio 3.3. *Olkoot X ja Y integroituvia satunnaismuuttujia samalla todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja olkoot a sekä b reaalilukuja. Ehdollisella odotusarvolla on seuraavat ominaisuudet:*

(i) (Lineaarisuus) $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{F}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$.

(ii) (Monotonisuus) Jos $X \geqslant 0$ *melkein varmasti, niin* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \geqslant 0$ *melkein varmasti.*

(iii) (Monotoninen suppeneminen) Jos

   (a) $X_i \geqslant 0$ *ja* $X_i \nearrow X$ *melkein varmasti,*

   (b) $\mathbb{E}[X_i \mid \mathcal{F}]$ *on olemassa kaikilla* i *ja*

   (c) X *on integroituva, niin*

   $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ *on olemassa ja* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}[X_i \mid \mathcal{F}]$ *melkein varmasti.*

Todistus. Luentomuistiinpanot [5, s. 71-72]. □

Propositio 3.4. *Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia ja $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ sekä $\mathcal{F}$ sigma-algebroja. Ehdollisella odotusarvolla on seuraavat ominaisuudet:*

(i) Jos X *on* $\mathcal{F}$*-mitallinen, niin* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$ *melkein varmasti.*

(ii) Jos X *on riippumaton sigma-algebrasta* $\mathcal{F}$*, niin* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$ *melkein varmasti.*

(iii) Jos X *on rajoitettu* $\mathcal{F}$*-mitallinen satunnaismuuttuja ja* $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$ *on olemassa tai sekä* X *että* Y *ovat neliöintegroituvia, niin*

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{F}] = X\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}].$$

(iv) Jos $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$*, niin* $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_2] \mid \mathcal{F}_1]$.

Todistus. Luentomuistiinpanot [5, s. 72-73]. □

Proposition 3.4 tulos on esitetty yksittäisille satunnaismuuttujille ja sigma-algebroille, mutta se voidaan myös esittää stokastiselle prosessille.

Korollaari 3.2. *Olkoon $\{\mathcal{F}_t\}$ prosessin $\{Z(t)\}$ generoima historia ja olkoot $s, t, u \in T$. Tällöin*

(i) $\mathbb{E}[Z(s) \mid \mathcal{F}_t] = Z(s)$*, m.v. kaikilla* $s \leq t$.

(ii) Jos $Z(s)$ *on rajoitettu ja* $\mathbb{E}[Z(t) \mid \mathcal{F}_s]$ *on olemassa, tai prosessi* $\{Z\}$ *on neliöintegroituva kaikilla* $s, t \in T$*, niin* $\mathbb{E}[Z(s)Z(t) \mid \mathcal{F}_s] = Z(s)\mathbb{E}[Z(t) \mid \mathcal{F}_s]$ *kaikilla* $s < t$.

(iii) Kun $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, niin* $\mathbb{E}[Z(u) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z(u) \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s]$.

3.3 Lebesgue-Stieltjes intergraali

Tämän aliluvun määritelmät ja lauseet seuraavat Helsingin yliopiston kurssin *Advanced life insurance mathematics* luentomuistiinpanoja (Lehtomaa, 2019)[7, s. 4-8]. Lisäksi lähteenä on käytetty teosta *The Lebesgue-Stieltjes Integral* (Carter & van Brunt, 2000) [2].

Määritelmä 3.8. Olkoon $I = [a, b]$, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *kokonaisheilahtelu* välillä I määritellään

$$V(f, I) = \sup \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \mid a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b \right\}.$$

Jos funktion kokonaisheilahtelu on äärellinen välillä I, sanotaan että funktio on *rajoitetusti heilahteleva* kyseisellä välillä. Rajoitetusti heilahtelevan funktion epäjatkuvuuspisteitä on enimmillään numeroituvasti ääretön määrä, ja sillä on hyppy näissä epäjatkuvuuspisteissä [7].

Propositio 3.5. *Funktio on rajoitetusti heilahteleva, jos ja vain jos se voidaan kirjoittaa kahden kasvavan funktion erotuksena.*

Todistus. Todistettu monisteessa Holopainen, Reaalianalyysi I, lause 3.60. □

Määritelmä 3.9. Funktio f on *càdlàg-funktio* välillä $[a, b]$ jos se on oikealta jatkuva

$$f(t+) := \lim_{s \to t+} f(s) = f(t)$$

ja vasen raja-arvo

$$f(t-) := \lim_{s \to t-} f(s)$$

on olemassa, kun $s, t \in [a, b]$.

Esimerkki 3.1. Satunnaismuuttujan kertymäfunktio on càdlàg-funktio. Määritelmän mukaan se on ei-vähenevä, oikealta jatkuva funktio, jolla on raja-arvot $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ja $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Lebesgue-Stieltjes integraalin määrittely

Olkoon $g : [a', b'] \to \mathbb{R}$ on kasvava càdlàg-funktio. Olkoot $a, b \in [a', b']$. Määritellään puoliavoimen välin$(a, b]$ m_g-mitta

$$m_g((a, b]) = g(b+) - g(a+) = g(b) - g(a).$$

Koska g on càdlàg-funktio, eli se on oikealta jatkuva, niin $g(t+) = g(t)$, kun t kuuluu välille $[a', b']$. Lisäksi oletetaan, että

$$m_g(\{a'\}) = 0,$$

eli funktiolla g ei voi olla hyppyä välin alkupisteessä. Mitalle m_g pätevät mitan ominaisuudet kaikilla Borel-joukoille välillä $[a', b']$: tyhjän joukon mitta on nolla, mitta on ei-negatiivinen ja täysadditiivinen. Seuraavaksi määritellään Lebesgue-Stieltjes integraali integraattorin g suhteen.

Oletetaan ensin, että $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen funktio, eli muotoa

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}(t \in T_i),$$

missä $a_i \geq 0$ ja kaikilla $i \in \mathbb{N}$ joukot T_i ovat erillisiä Borel-joukkoja, jotka osittavat välin $[a, b]$. Lebesgue-Stieltjes integraali funktiosta f funktion g suhteen on

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)dm_g(T_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_g(T_i).$$

Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ on positiivinen funktio, ja f_n, missä $n \in \mathbb{N}$ ovat yksinkertaisia funktioita, jotka suppenevat kohti funktiota f pisteittäin, niin Lebesgue-Stieltjes integraali funktiolle f integraattorin g suhteen on

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dg(t).$$

Lebesgue-Stieltjes integraali funktiolle $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f^+(t)dg(t) - \int_a^b f^-(t)dg(t),$$

missä f^+ on funktion f positiivinen osa, $f^+ = f(t)\mathbb{1}(f(t) \geq 0)$ ja f^- sen negatiivinen osa, $f^- = -f(t)\mathbb{1}(f(t) \leq 0)$.

Lebedgue-Stieltjes integraalin ominaisuuksia

Yllä Lebesgue-Stieltjes integraalin määritelmissä integraattorin oletettiin olevan kasvava càdlàg-funktio. Lebesgue-Stieltjes integraali voidaan määritellä proposition 3.5 nojalla kaikille rajoitetusti heilahteleville càdlàg-funktioille g erotuksena

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)dg_1(t) - \int_a^b f(t)dg_2(t),$$

missä g_1 ja g_2 ovat kasvavia càdlàg-funktioita ja $g = g_1 - g_2$, kunhan kumpikin integraali on olemassa.

Huomautus 3.4. Merkinnällä $\int_a^b f(t)dg(t)$ tarkoitetaan integraalia yli puoliavoimen välin $\int_{(a,b]} f(t)dg(t)$.

Propositio 3.6. *Luentomuistiinpanojen [7] mukaan Lebesgue-Stieltjes integraalille pätee seuraavat ominaisuudet:*

(i) Olkoot f_1 ja f_2 mitallisia funktioita ja α_1 sekä α_2 reaalilukuja. Nyt

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f(t))\, dg(t) = \alpha_1 \int_a^b f_1(t)dg(t) + \alpha_2 \int_a^b f_2(t)dg(t).$$

(ii) Olkoot f mitallinen funktio, α_1 sekä α_2 reaalilukuja ja g_1 sekä g_2 kasvavia ja rajoitetusti heilahtelevia càdlàg-funktioita. Nyt

$$\int_a^b f(t)d\left(\alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t)\right) = \alpha_1 \int_a^b f(t)dg_1(t) + \alpha_2 \int_a^b f(t)dg_2(t).$$

(iii) Jos funktio f on vasemmalta jatkuva ja rajoitetusti heilahteleva ja ositusta $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ hienonnetaan äärettömäsi

$$\max\{t_{i+1} - t_i | i \in 0, 1, \ldots, n-1\} \to 0, \text{ kun } n \to \infty,$$

niin Lebesgue-Stieltjes interaali voidaan kirjoittaa summana

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\left(g\left(t_{i+1}\right) - g\left(t_i\right)\right).$$

(iv) Jos integraattori g on differentoituva, eli sen derivaatta on olemassa välillä $[a, b]$, ja funktiot f ja g' ovat Riemann-integroituvia funktioita, niin

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

3.4 Martingaalit

Martingaali on stokastinen prosessi, jolle odotusarvo tuleville ajanhetkille on yhtä suuri kuin sen tarkasteluhetken arvo.

Määritelmä 3.10. Olkoon $\{M(t)\}$ filtraation $\{\mathcal{F}_t\}$ suhteen sopiva stokastinen prosessi ja olkoon T indeksijoukko. Olkoon $M(t)$ integroituva kaikilla $t \in T$.

(i) Prosessi $\{M(t)\}$ on *martingaali* filtraation $\mathcal{F}_t$ suhteen, jos $\mathbb{E}[M(u) \mid \mathcal{F}_t] = M(t)$ kaikilla $u > t$.

(ii) Prosessi $\{M(t)\}$ on *alimartingaali*, jos $\mathbb{E}[M(u) \mid \mathcal{F}_t] \geq M(t)$ kaikilla $u > t$.

(iii) Prosessi $\{M(t)\}$ on *ylimartingaali*, jos $\mathbb{E}[M(u) \mid \mathcal{F}_t] \leq M(t)$ kaikilla $u > t$.

Ehtoa i kutsutaan *martingaaliominaisuudeksi.*

Seuraava propositio on hyvin tärkeä martingaalien ominaisuus. Alimartingaali voidaan jakaa summaksi martingaalista ja kompensaattorista, joka on sigma-algebran suhteen sopiva prosessi. Kun lasketaan alimartingaalin muutoksen odotusarvoa, voidaan martingaaliosa ”jättää huomiotta”.

Propositio 3.7. ***Doob-Meyer hajotelma*** *Olkoon X alimartingaali. Sen yksikäsitteinen Doob-Meyer hajotelma on*

$$X(t) = M(t) + \Lambda(t),$$

missä M on martingaali, jonka alkuarvo on nolla ja Λ on kasvava, sopiva ja jatkuva prosessi. Prosessia Λ kutsutaan alimartingaalin X kompensaattoriksi.

Todistus. Todistus on löydettävissä esimerkiksi Beiglböckin, Schachermayerin ja Veliyevin artikkelista [1]. □

Huomautus 3.5. Kompensaattoria Λ voidaan tulkita Doob-Meyerin hajotelman lisäyksen avulla

$$d\Lambda(t) = \mathbb{E}[dX(t) \mid \mathcal{F}_{t-}].$$

Määritelmä 3.11. Neliöintegroituvan martingaalin X neliö X^2 on alimartingaali (seurausta Jensenin epäyhtälöstä, [5, s. 16]). Alimartingaalin X^2 kompensaattorille käytetään merkintää $\langle X \rangle$, siis

$$X^2(t) = \langle X(t) \rangle + M(t),$$

missä $M(t)$ on martingaali. Martingaalin neliön kompensaattorille käytetään myös nimitystä *ennustettava varianssiprosessi.*

Määritelmä 3.12. Neliöintegroituvien martingaalien $X(t)$ ja $Y(t)$ tulo voidaan kirjoittaa muodossa

$$X(t)Y(t) = \langle X(t), Y(t) \rangle + M(t),$$

missä $M(t)$ on martingaali, jonka alkuarvo on nolla. Prosessille $\langle X(t), Y(t) \rangle$ käytetään myös nimitystä *ennustettava kovarianssiprosessi*. Kovarianssiprosessi $\langle X(t), Y(t) \rangle$ voidaan myös määritellä sen arvonmuutoksien avulla

$$d \langle X(t), Y(t) \rangle = \operatorname{Cov} \left(dX(t), dY(t) \mid \mathcal{F}_{t-} \right).$$

Kahden prosessin sanotaan olevan ortogonaalisia, jos $\langle X(t), Y(t) \rangle = 0$.

Esitellään lopuksi kaksi propositiota martingaaleille. Olkoon $X(t)$ välillä $[a, b]$ rajoitetusti heilahteleva càdlàg-martingaali, ja olkoon $H(t)$ vasemmalta jatkuva, rajoitetusti heilahteleva ja sopiva prosessi. Merkitään $X = X_1 - X_2$, missä X_1 ja X_2 ovat kasvavia, neliöintegroituvia ja filtraation suhteen sopivia càdlàg-prosesseja. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $t \in [a, b]$ pätee

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^t |H(s)| dX_k(s) \right)^2 \right] < \infty, \text{ ja } \mathbb{E} \left(\int_a^t |H(s)^2| d \langle X_k(s) \rangle \right) < \infty, \text{ kun } k = 1, 2.$$

Propositio 3.8. *Kun $t \in [a, b]$, stokastinen prosessi*

$$M(t) = \int_a^t H(s) dX(s)$$

on martingaali.

Todistus. Luentomuistiinpanot, Lehtomaa [7, s. 17-19] □

Propositio 3.9. *Kaikilla $t \in [a, b]$ pätee*

$$\left\langle \int_a^t H(s) dX(s) \right\rangle = \int_a^t H(s)^2 d \langle X(s) \rangle.$$

Todistus. Luentomuistiinpanot, Lehtomaa [7, s. 21-27] □

Propositio 3.10. *Olkoon $H(t)$ vasemmalta jatkuva ja rajoitetusti heilahteleva filtraation $\mathcal{F}_t$ suhteen sopiva prosessi. Nyt*

(i)

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t H(u) dM(u) \mid \mathcal{F}_s \right] = 0$$

(ii)

$$\mathrm{Var}\left(\int_s^t H(u)dM(u) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_s^t H^2(u)d\langle M(u)\rangle \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Todistus. Merkitään

$$X(t) = \int_s^t H(u)dM(u).$$

(i) Proposition 3.8 nojalla $X(t)$ on martingaali. Nyt martingaaliominaisuuden nojalla

$$\mathbb{E}\left[X(t) \mid \mathcal{F}_s\right] = X(s),$$

ja

$$X(s) = \int_{(s,s]} H(u)dM(u) = 0.$$

(ii) Varianssin laskusääntöjen nojalla

$$\mathrm{Var}\left(X(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left[X(t)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[X(t) \mid \mathcal{F}_s\right]^2,$$

ja kohdan (i) nojalla summan toinen termi on nolla. Martingaalin neliö on alimartingaali, joten proposition 3.7 nojalla sen uniikki Doob-Meyer hajotelman on

$$X(t)^2 = \langle X(t)\rangle + M'(t),$$

missä $M'(t)$ on martingaali, jonka alkuarvo on nolla. Tästä seuraa, että $\mathbb{E}\left[M'(t) \mid \mathcal{F}_s\right] = 0$, jolloin

$$\mathbb{E}\left[X(t)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\langle X(t)\rangle \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Proposition 3.9 nojalla

$$\langle X(t)\rangle = \langle \int_s^t H(u)dM(u)\rangle = \int_s^t H^2(u)d\langle M(u)\rangle,$$

jolloin

$$\mathrm{Var}\left(X(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left[X(t)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\langle X(t)\rangle \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t H^2(u)d\langle M(u)\rangle \mid \mathcal{F}_s\right].$$

□

4 Hattendorffin lause

Hattendorffin lauseen tulokset esitti ensimmäisen kerran K. Hattendorff vuonna 1868. Ensimmäisen todistuksen ajatellaan yleisesti olevan J.F. Steffensenin käsialaa vuodelta 1929. Tässä työssä esitellään moderni versio todistuksesta, jossa hyödynnetään martingaalien tarjoamaa teoriaa.

4.1 Hattendorffin lauseen yleinen muotoilu

Oletetaan, että vakuutussopimus alkaa hetkellä 0 ja päättyy hetkellä n, missä $n < \infty$. Olkoon $A(s)$ on funktio, joka kuvaa vakuutussopimuksessa välillä $(0, s]$ maksettujen korvausmaksujen ja vakuutusmaksujen erotusta, kun $s \leq n$. Oletetaan, että maksufunktiolla A on rajoitettu heilahtelevuus kaikilla äärellisillä väleillä, ja että se on càdlàg-funktio. Oletetaan, että diskonttausfunktio v on ei satunnainen ja olkoon

$$K(t) = \int_0^t v(s)dA(s),$$

välillä $[0, t]$ tapahtuneiden maksujen nettonykyarvo ja olkoon $L(s, t)$ vakuutussopimuksen välillä $(s, t]$ muodostuvan tappion nykyarvo määritelmän 2.9 mukaisesti.

Olkoon nyt $0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_m = n$, missä $m < \infty$, välin $[0, n]$ ositus. Merkitään

$$L_k = L(t_{k-1}, t_k)$$

välillä $(t_{k-1}, t_k]$ syntyneelle tappiolle, kun $0 < k \leq m$. Hetken t_{k-1} jälkeen sopimuksen päättymiseen asti, eli aikavälillä $(t_{k-1}, t_m]$, syntynyt tappio voidaan jakaa summaksi erillisillä osaväleillä syntyneistä tappioista. Olkoon $V(t)$ sopimuksen vastuuvelka hetkellä $t \in [0, n]$ kuten määritelmässä 2.8. Nyt

$$\begin{aligned}
&L(t_k) + L(t_{k+1}) + \ldots + L(t_m) \\
&= K(t_{k-1}, t_k) + V(t_k) - V(t_{k-1}) + \ldots + K(t_{m-1}, t_m) + V(t_m) - V(t_{m-1}) \\
&= K(t_{k-1}, t_m) + V(t_m) - V(t_{k-1}) \\
&= L(t_{k-1}, t_m).
\end{aligned}$$

Seuraavaksi esitellään lause, jonka kohtia (i) ja (ii) kutsutaan Hattendorffin lauseeksi, ja jonka kohdat (iii) ja (iv) antavat laskettavan muodon tappiolle. Olkoon $\{\mathcal{F}_t\}$ filtraatio, missä kaikilla $t \in [0, n]$ $\mathcal{F}_t$ on sigma-algebra, joka sisältää tiedon hetkeen t asti tapahtuneista maksuista.

Lause 4.1 (Hattendorffin lause). *Olkoon vakuutussopimus hinnoiteltu ekvivalenssiperiaatteen nojalla. Oletetaan, että* $\mathrm{Var}(K(n)) < \infty$, *ja että* K *ja* L *on määritelty kuten yllä. Nyt kaikille* $0 < i < j < k \leq m$ *pätee* *(i)* $\mathbb{E}\left[L_k \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0$,

(ii) $\mathrm{Cov}\left[L_j, L_k \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0$,

(iii) $\mathrm{Var}\left(L(t_j, t_m) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=j+1}^{m} L_k \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \sum_{k=j+1}^{m} \mathrm{Var}\left(L_k \mid \mathcal{F}_{t_i}\right)$, *ja*

(iv) *välillä k muodostuneen tappion varianssi voidaan laskea kompensaattorin $\langle\Gamma\rangle$ avulla*

$$\mathrm{Var}\left(L_k \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \mathbb{E}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} d\langle\Gamma(s)\rangle \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[\langle\Gamma\left(t_k\right)\rangle - \langle\Gamma\left(t_{k-1}\right)\rangle \mid \mathcal{F}_{t_i}\right],$$

missä $\Gamma(t) = \mathbb{E}\left[K(n) \mid \mathcal{F}_t\right]$.

Todistus. Kun näytetään, että kaikilla k, kun $0 < k \leq m$, tappio L_k on neliöintegroituvan martingaalin arvonmuutos, kohdat (i) ja (ii) pätevät proposition A.1 ja A.3 nojalla. Kohdat (iii) ja (iv) pätevät korollaarien A.1 ja A.2 nojalla. □

4.2 Lauseen todistus diskreetissä ajassa

Oletetaan, että henkivakuutussopimus alkaa hetkellä nolla ja kaikki maksusuoritukset tapahtuvat (vuosittain) ajanhetkinä $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Olkoon A_k funktio joka kuvaa hetkellä k tapahtuvia maksuja. Oletetaan, että A_k on integroituva ja $\mathcal{F}_k$-mitallinen. Oletetaan korkoutuvuuden olevan vakio ja olkoon v diskonttauskerroin. Olkoon K_k sopimuksen välin $[0, k]$ nettokassavirran nykyarvo sopimuksen alkamishetkellä

$$K_k = \sum_{t=0}^{k} v^t A_t.$$

Sopimuksen (prospektiivinen) vastuuvelka hetkellä k on

$$V_k = \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n-k} v^t A_{k+t} \mid \mathcal{F}_k\right].$$

Olkoon Γ_k koko sopimusajan nettokassavirran nykyarvon odotusarvo hetkellä k,

$$\begin{aligned}
\Gamma_k &= \mathbb{E}\left[K_n \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&= \sum_{t=0}^{k} v^t A_t + \mathbb{E}\left[\sum_{t=k+1}^{n} v^t A_t \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&= \sum_{t=0}^{k} v^t A_t + \mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n-k} v^{t+k} A_{t+k} \mid \mathcal{F}_k\right] \\
&= \sum_{t=0}^{k} v^t A_t + v^k V_k.
\end{aligned}$$

Huomautus 4.1. Γ_k on itse asiassa välillä $[0, n]$ syntyvän tappio, sillä

$$\Gamma_k = K_k + v^k V_k - v^0 V_0,$$

sillä V_0 on ekvivalenssiperiaatteen nojalla 0.

Funktio Γ_k on integroituva, sillä oletuksen nojalla A_k on integroituva. Yllä määritellyn mukaan ja proposition 3.4 nojalla

$$\mathbb{E}\left[\Gamma_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[K_n \mid \mathcal{F}_{k+1}\right] \mid \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[K_n \mid \mathcal{F}_k\right] = \Gamma_k,$$

joten funktiolle $\Gamma(k)$ pätee martingaaliominaisuus. Siis Γ_k on määritelmän 3.10 mukainen martingaali filtraation $\mathcal{F}_k$ suhteen.

Martingaalin Γ arvonmuutokselle hetkien $k-1$ ja k välillä pätee

$$\begin{aligned}
\Gamma_k - \Gamma_{k-1} &= \sum_{t=0}^{k} v^t A_t + v^k V_k - \sum_{t=0}^{k-1} v^t A_t - v^{k-1} V_{k-1} \\
&= v^k A_k + v^k V_k - v^{k-1} V_{k-1} \\
&= L_k,
\end{aligned}$$

kun tappio L_k määritelmän 2.9 mukainen. Vuosittaiset tappiot L_k ovat siis martingaalin arvonmuutoksia, jolloin Hattendorffin lauseen tulokset pätevät liitteen A tulosten nojalla.

4.3 Lauseen todistus jatkuvassa ajassa

Näytetään seuraavaksi, että edellisen aliluvun tulos pätee myös, kun maksut funktio on stokastinen integraali ja maksut tapahtuvat jatkuvassa ajassa.

Määritelmä 4.1. Määritellään stokastinen prosessi $\{\Gamma(t)\}$ ehdolliseksi odotusarvoksi kassavirran nykyarvosta sigma-algebran $\mathcal{F}_t$ suhteen. Kaikilla $t \in [0, n]$

$$\Gamma(t) = \mathbb{E}\left[K(n) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Prosessi $\{\Gamma(t)\}$ kuvaa vakuutussopimuksen kassavirran nykyarvon odotusarvoa eri hetkillä.

Lemma 4.1. *Määritelmän 4.1 mukainen stokastinen prosessi on martingaali.*

Todistus. Oletusten nojalla $\mathbb{E}|K(n)| < \infty$, joten $\mathbb{E}|\Gamma(t)| < \infty$ kaikilla $t \in [0, n]$. Olkoon $u \in (0, n]$ siten, että $u > t$. Nyt propositiossa 3.4 esitettyjen ehdollisen odotusarvon ominaisuuksien nojalla

$$\mathbb{E}\left[\Gamma(u) \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[K(n) \mid \mathcal{F}_u\right] \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[K(n) \mid \mathcal{F}_t\right] = \Gamma(t).$$

Koska $\{\Gamma(t)\}$ on integroituva ja sillä on martingaaliominaisuus, niin se on martingaali. $\square$

Lemma 4.2. *Olkoon $L(s, t)$ määritelmän 2.9 mukainen vakuutussopimuksen välillä $[s, t)$ synnyttämä tappio ja olkoon $\{\Gamma(t)\}$ määritelmän 4.1 mukainen martingaali. Tappio $L(s, t)$ voidaan kirjoittaa martingaalin Γ lisäyksenä*

$$L(s, t) = \Gamma(t) - \Gamma(s).$$

Todistus. Olkoon $t \in [0, n)$. Martingaalin Γ arvo hetkellä t on määritelmän mukaan

$$\Gamma(t) = \mathbb{E}\left[K(n) \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^n v(s)dA(s) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Ehdollisen odotusarvon lineaarisuuden (propositio 3.3) ja integraalien laskusääntöjen nojalla ylläoleva voidaan kirjoittaa summana

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t v(s)dA(s) \mid \mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^n v(s)dA(s) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Ensimmäinen termi on kassavirran hetkellä t diskontattu nykyarvo

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t v(s)dA(s) \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[K(t) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Koska $K(t)$ on filtraation $\mathcal{F}_t$ suhteen sopiva prosessi, niin $\mathbb{E}\left[K(t) \mid \mathcal{F}_t\right] = K(t)$. Vastuuvelan määritelmän 2.8 nojalla toiselle termille saadaan

$$\mathbb{E}\left[\int_t^n v(s)dA(s) \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[K(t, n) \mid \mathcal{F}_t\right] = v(t)V(t).$$

Martingaali Γ arvo hetkellä t voidaan kirjoittaa muodossa

$$\Gamma(t) = K(t) + v(t)V(t).$$

Olkoon $s < t$. Nyt martingaalin Γ arvonmuutos hetkestä s hetkeen t on

$$\begin{aligned}
\Gamma(t) - \Gamma(s) &= K(t) + v(t)V(t) - K(s) - v(s)V(s) \\
&= K(s,t) + v(t)V(t) - v(s)V(s) \\
&= L(s,t)\ ,
\end{aligned}$$

sillä määritelmän 2.9 mukaan $L(s,t) = K(s,t) + v(t)V(t) - v(s)V(s)$. □

Huomautus 4.2. Todistuksessa käytettiin vastuuvelasta muotoilua, jossa viitatusta määritelmästä 2.8 poiketen odotusarvon tilalla on ehdollinen odotusarvo. Kun ehtona oleva filtraatio mielletään tapahtumien muodostamaksi historiaksi, on sen lisääminen vastuuvelan yhtälöön perusteltua. Vastuuvelka ehdollisena odotusarvona on määritelty Markovilaiselle mallille määritelmässä 5.5.

5 Markovin prosessilla mallinnettavat sopimukset

Tässä luvussa keskitytään sellaisiin henkivakuutussopimuksiin, joita voidaan mallintaa Markovin prosessilla. Markovin prosessi on stokastinen prosessi, jonka siirtymätodennäköisyydet eivät riipu prosessin historiasta, vaan ainoastaan sen hetkisestä tilasta. Henkivakuutussopimuksen mallintamisella Markovin prosessilla tarkoitetaan asetelmaa, jossa vakuutussopimuksen kehitystä kuvataan Markovilaisella prosessilla.

5.1 Markovin prosessi

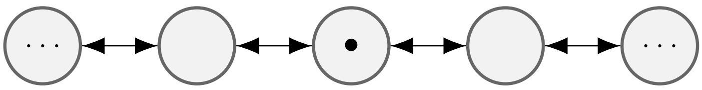
Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ historiallinen todennäköisyysavaruus, T indeksijoukko, $\{Z(t)\}$ stokastinen prosessi ja E sen äärellinen tila-avaruus. Oletetaan, että $E \subset \mathbb{N}$, eli tila-avaruus on luonnollisten lukujen osajoukko.

Määritelmä 5.1. Stokastisella prosessille $Z(t)$ sanotaan olevan *Markov-ominaisuus*, jos kaikille $j \in E$ ja $s, t, u \in T$, $t \leq u$ pätee

$$\mathbb{P}\left(Z(u) = j \mid \sigma\left(Z(s), s \leq t\right)\right) = \mathbb{P}\left(Z(u) = j \mid \sigma\left(Z(t)\right)\right).$$

Markov-ominaisuus tarkoittaa, että prosessin tulevaisuus riippuu vain nykyhetkestä, ei menneisyydessä tapahtuneista muutoksista. Stokastista prosessia, jolle pätee Markov-ominaisuus, kutsutaan *Markov-prosessiksi.*

Esimerkki 5.1 (Noppapeli)**.** Pelinappulan liikkeitä pelilaudalla kuvataan stokastisella prosessilla. Pelinappula liikkuu yhden askeleen eteenpäin parillisilla silmäluvuilla ja yhden taaksepäin parittomilla silmäluvuilla. Stokastinen prosessi on Markovin prosessi.



Kuva 5.1: Mikäli nopan silmäluku on parillinen, nappula siirtyy yhden ruudun eteenpäin, ja parittomalla silmäluvuilla taaksepäin. Todennäköisyys siirtyä eteenpäin riippuu nopasta, ei pelinappulan aiemmista liikkeistä.

Esimerkki 5.2 (Ei-markovilainen prosessi)**.** Stokastinen prosessi muodostuu korttipakasta nostettujen korttien maista. Kun kortti on nostettu, sitä ei palauteta nostopakkaan. Tila-avaruus on $E = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$ ja indeksijoukko koostuu nostoista $T = \{1, 2, \ldots, 52\}$. Nostettaessa 14. kortti, todennäköisyys, että se on pata on

$$\mathbb{P}\left(Z(14) = \spadesuit \mid Z(1) = \ldots = Z(13) = \spadesuit\right) = 0,$$

nolla jos kaikki aiemmat kortit ovat olleet patoja, mutta

$$\mathbb{P}\left(Z(14) = \spadesuit \mid Z(1) = \heartsuit,\ Z(2) = \ldots = Z(13) = \spadesuit\right) = \frac{1}{39},$$

jos esimerkiksi ensimmäinen nostetun kortin maa oli jokin muu kuin pata. Kaikkien edellisten nostettujen korttien maa vaikuttaa siis seuraavaksi nostettavan maan todennäköisyyteen.

Määritelmä 5.2. Todennäköisyydelle, että hetkellä t tilassa j oleva markovilainen prosessi on tilassa k hetkellä u käytetään merkintää

$$P_{jk}(t,u) = \mathbb{P}\left(Z(u) = k \mid Z(t) = j\right).$$

Tätä todennäköisyyttä kutsutaan *siirtymätodennäköisyydeksi* tilasta j tilaan k.

Huomautus 5.1. Siirtymätodennäköisyys ei ota kantaa siihen, siirtyykö prosessi tilasta j tilaan k yhdellä siirtymällä vai käykö se muissa tiloissa (mukaan lukien tilat j ja k) hetkien t ja u välillä.

Propositio 5.1. *Siirtymätodennäköisyyksille $P_{jk}(t,u)$ pätee Chapman-Kolmogorov yhtälöt. Kaikille $j,k,m \in E$ pätee*

(i)

$$P_{jk}(t,u) \geq 0 \text{ , } kun\ 0 \leq t < u,$$

(ii)

$$\sum_{k\in E} P_{jk}(t,u) = 1 \text{ , } kun\ 0 \leq t < u\ ja$$

(iii)

$$P_{jm}(s,u) = \sum_{k\in E} P_{jk}(s,t)P_{km}(t,u) \text{ , } kun\ 0 \leq s < t < u.$$

Todistus. Kohdat (i) ja (ii) seuraavat siitä, että P on todennäköisyysmitta. (iii) saadaan ehdollisen todennäköisyyden määritelmää

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

ja Markov-ominaisuutta käyttäen. Olkoon $j, k, m \in E$ ja $0 \geq s < t < u$. Nyt

$$\begin{aligned}
P_{jm}(s,u) &= \mathbb{P}\left(Z(u) = m \mid Z(s) = j\right) \\
&= \sum_{k \in E} \mathbb{P}\left(Z(u) = m, Z(t) = k \mid Z(s) = j\right) \\
&= \sum_{k \in E} \frac{\mathbb{P}\left(Z(u) = m, Z(t) = k, Z(s) = j\right)}{\mathbb{P}\left(Z(s) = j\right)} \\
&= \sum_{k \in E} \frac{\mathbb{P}\left(Z(s) = j\right) \mathbb{P}\left(Z(t) = k \mid Z(s) = j\right) \mathbb{P}\left(Z(u) = m \mid Z(t) = k, Z(s) = j\right)}{\mathbb{P}\left(Z(s) = j\right)} \\
&= \sum_{k \in E} \mathbb{P}\left(Z(t) = k \mid Z(s) = j\right) \mathbb{P}\left(Z(u) = m \mid Z(t) = k\right) \\
&= \sum_{k \in E} P_{jk}(s,t) P_{km}(t,u).
\end{aligned}$$

□

Jatkossa oletamme, että kaikille $j, k \in E$ siirtymätodennäköisyydet $P_{jk}(t, \cdot)$ ja $P_{jk}(\cdot, u)$ ovat jatkuvia funktioita. Lisäksi jatkossa kaikille tiloille j ja k pätee

$$\lim_{u \to t+} P_{jk}(t,u) = \delta_{jk}$$

missä

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, \text{ jos } j \neq k \\ 1, \text{ jos } j = k, \end{cases}$$

ja

$$P_{jk}(t,t) = 0 \text{ ja } P_{jj}(t,t) = 1.$$

Funktiota δ_{jk} kutsutaan Kroneckerin deltaksi.

Määritelmä 5.3. Olkoot j ja k tiloja samalla äärellisellä tila-avaruudella E. Tilojen välinen *siirtymäintensiteetti* on oikea raja-arvo siirtymätodennäköisyydestä $P_{jk}(t,u)$, kun $u = t$.

$$\begin{aligned}
\mu_{jk}(t) &:= \frac{\partial +}{\partial u} P_{jk}(t,u)_{|u=t} \\
&= \lim_{\Delta \to 0+} \frac{P_{jk}(t, t+\Delta) - P_{jk}(t,t)}{\Delta}.
\end{aligned}$$

Kun $j \neq k$, pätee edellä sovitun mukaan $P_{jk}(t,t) = 0$, jolloin saadaan

$$\mu_{jk}(t) = \lim_{\Delta \to 0+} \frac{P_{jk}(t, t+\Delta)}{\Delta}.$$

Kun $j = k$, proposition 5.1 sekä oletuksesta, että siirtymäintensiteetit $\mu_{jk}(t)$ ovat olemassa raja-arvoina, saadaan *pysymisintensiteetille* μ_{jj} kaava

$$\begin{aligned}
\mu_{jj}(t) &= \lim_{\Delta \to 0+} \frac{P_{jj}(t, t+\Delta) - P_{jj}(t,t)}{\Delta} \\
&= \lim_{\Delta \to 0+} \frac{1 - \sum_{k \in E, k \neq j} P_{jk}(t, t+\Delta) - 1}{\Delta} \\
&= - \sum_{k \in E, k \neq j} \mu_{jk}(t).
\end{aligned}$$

Siirtymätodennäköisyyksille pätee *Kolmogorovin forward ja backward yhtälöt.*

Propositio 5.2. *Olkoot siirtymäintensiteetit μ_{jk} jatkuvia funktioita. Nyt*

$$\frac{\partial}{\partial u} P_{jm}(t, u) = \sum_{k \in E} P_{jk}(t, u) \mu_{km}(u)$$

ja

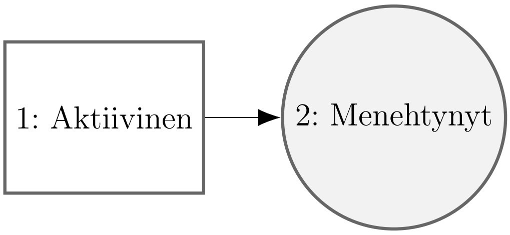
$$\frac{\partial}{\partial t} P_{jm}(t, u) = - \sum_{k \in E} \mu_{jk}(t) P_{km}(t, u).$$

Todistus. Luentomoniste [8, s. 28-29] □

5.2 Vakuutussopimuksen mallintaminen markovilaisella prosessilla

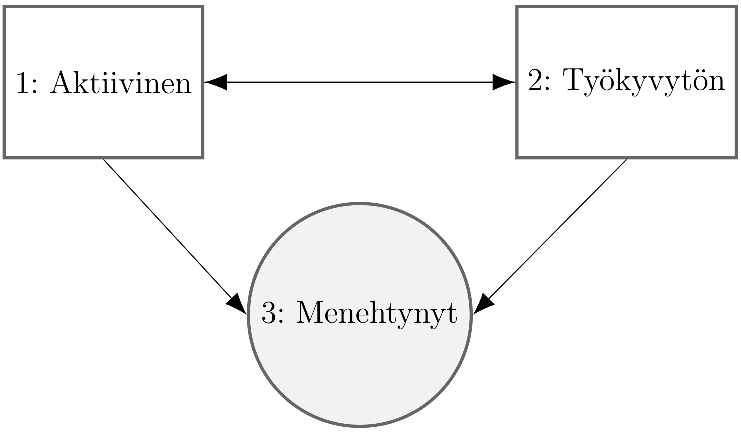
Kun vakuutussopimuksia mallinnetaan Markovin prosessien avulla, voidaan tilojen avulla eritellä erilaisia vakuutusmaksu ja -korvaustyyppejä. Tilat tulee määritellä niin, että todennäköisyys siirtyä tilasta toiseen ei riipu prosessin historiasta, sillä muutoin tilojen välillä liikkuva prosessi ei ole Markovin prosessi. Kun vakuutussopimus mallinnetaan markovilaisella prosessilla, vakuutussopimuksen maksut riippuvat prosessin nykyisestä tilasta tai siirtymistä tilojen välillä.

Esimerkki 5.3. Yksinkertaisen mallin tila-avaruus koostuu kahdesta tilasta **1: Aktiivinen** ja **2: Menehtynyt**. Markovin prosessi saa arvon 1, eli pysyy tilassa 1, kun vakuutettu on elossa. Tällöin vakuutettu maksaa sopimuksen mukaista vakuutusmaksua. Vakuutetun menehtyessä Markovin prosessi siirtyy tilaan 2. Siirtymän seurauksena suoritetaan kertaluontoinen vakuutuskorvaus ja sopimus päättyy. Siirtymäintensiteetti tilojen 1 ja 2 välillä on hetkellä t määritelmän 2.10 mukainen kuolevuusintensiteetti $\mu(x+t)$, kun vakuutetun ikä sopimuksen alkaessa on x.



Kuva 5.2: Kaksitilainen markovilainen prosessi. Prosessi voi siirtyä tilasta 1 tilaan 2, mutta ei voi palata tilaan 1 siirtymän jälkeen.

Esimerkki 5.4. Kolmitilainen markovilainen prosessi Lisätään esimerkin 5.3 tila-avaruuteen tila "2: Työkyvytön". Oletetaan, että sopimuksen solmimishetkellä prosessi on tilassa 1. Prosessi voi siirtyä tilojen välillä kuvan 5.3 nuolien mukaisesti. Tilassa 1 maksetaan vakuutusmaksua, tilassa 2 vakuutusyhtiö maksaa korvauksia työkyvyttömälle ja vakuutetun mehetyessä maksetaan kertaluontoinen korvaus.



Kuva 5.3: Kolmitilainen markovilainen prosessi. Tilat kuvaavat vakuutetun työkykyisyyttä. Aktiivinen vakuutettu voi joutua työkyvyttömäksi tai menehtyä. Työkyvytön voi palata aktiiviseksi tai menehtyä. Menehtynyt ei luonnollisesti voi enää herätä henkiin.

Huomautus 5.2. Koska siirtyminen tilojen välillä ei saa riippua prosessin historiasta, esimerkin 5.4 malli on hieman epärealistinen, sillä työkyvyttömyysjaksojen määrä todennäköisesti vaikuttaa todennäköisyyteen palata aktiiviseksi. Asia voidaan korjata lisäämällä malliin tiloja, mutta yksinkertaisuuden vuoksi tehdään oletus, että tällaisessa kolmitilaisessa mallissa kyseessä on Markovin prosessi.

5.3 Maksuprosessi Lebesgue-Stieltjes integraalina

Erityyppisiin henkivakuutussopimuksiin liittyy erilaisia maksuja. Tässä luvussa näytetään, että sopimuksen kassavirran nettonykyarvo voidaan ilmaista Lebesgue-Stieltjes integraalina. Esitys seuraa luentomuistiinpanoja Lehtomaa 2019 [7, s. 33-36]. Rajoitumme tutkimaan sopimustyyppejä, joita voidaan mallintaa Markovin prosessilla. Maksut riippuvat siis joko prosessin nykyisestä tilasta tai siirtymisestä tilojen välillä.

Olkoon t välillä $[0, n]$, missä $n < \infty$ ja olkoon $\{Z(t)\}$ Markovin prosessi, joka saa arvonsa äärellisellä tila-avaruudella E. Lisäksi oletetaan, että vasemmat raja-arvot $\lim_{s \to t} Z(s)$ ovat olemassa, jolloin $Z(t)$ on càdlàg-prosessi. Kun $j, k \in E$ siirtymätodennäköisyydet P_{jk} ja siirtymäintensiteetit μ_{jk} määritellään kuten aliluvussa 5.1. Intensiteetit oletetaan olemassa oleviksi jatkuvina funktioina. Prosessin alkutilalle käytetään merkintää j_0, eli $Z(0) = j_0$.

Ennen kuin voidaan määritellä maksuprosessi, pitää määritellä laskuriprosessi laskemaan siirtymät tilasta j tilaan k.

Määritelmä 5.4. Laskuriprosessi $N_{jk}(t)$ laskee siirtymien määrän tilasta j tilaan k hetkien 0 ja t välillä, eli

$$\begin{aligned} N_{jk}(t) &= \# \{s \in (0, t] : Z(s-) = j, Z(s) = k\} \\ &= \sum_{s \le t} \mathbb{1}\left(Z(s-) = j, Z(s) = k\right). \end{aligned}$$

Laskuriprosessin $N_{jk}(t)$ arvonmuutokselle pätee

$$dN_{jk}(t) = \begin{cases} 0, \text{ jos prosessi pysyy tilassa } j \\ 1, \text{ jos prosessi hypää tilasta } j \text{ tilaan } k. \end{cases}$$

Siis

$$dN_{jk}(t) = \mathbb{1}\left(Z(t-) = j, Z(t) = k\right).$$

Summan termien määrä on äärellinen välillä $[0, n]$, koska Markovin prosessin hyppyjen määrä välillä $(0, b]$, kun $b > 0$, on äärellinen todennäköisyydellä yksi. [8, s.40] Laskuriprosessi $N_{jk}(t)$ on ei-negatiivinen ja kasvava. Kasvavalla funktiolla on proposition 3.5 nojalla rajoitettu heilahtelevuus. Voidaan näyttää, että se on alimartingaali ja esittää sen kompensaattori funktion Λ_{jk} avulla.

Lemma 5.1. *Laskuriprosessi $N_{jk}(t)$ on alimartingaali ja sen kompensaattori on*

$$\Lambda_{jk}(t) = \int_0^t \mathbb{1}\left(Z(s-) = j\right) \mu_{jk}(s) ds$$

kaikilla t välillä $[0, n]$.

Todistus. Todistus löytyy luentomuistiinpanoista Lehtomaa 2019 [7]. □

Korollaari 5.1.

$$M_{jk}(t) = N_{jk}(t) - \Lambda_{jk}(t)$$

on neliöintegroituva martingaali ja sen odotusarvo on nolla.

Todistus. Tulokseen viitataan Ramlau-Hansenin artikkelissa [15, s. 145]. □

Ennustettava varianssiprosessi $\langle M_{jk} \rangle$ määritellään yhtälöstä

$$d\langle M_{jk}(t)\rangle = \mathrm{Var}\left(dM_{jk}(t) \mid \mathcal{F}_{t-}\right).$$

Propositio 5.3. *Olkoon $M_{jk}(t)$ korollaarin 5.1 mukainen martingaali. Nyt ennustettavalle varianssiprosessille pätee*

$$\langle M_{jk}(t)\rangle = \Lambda_{jk}(t).$$

Todistus. Tulokseen viitataan Ramlau-Hansenin artikkelissa [15, s. 145]. □

Seuraavaksi esitellään tapa esittää vakuutussopimuksen maksut Lebesgue-Stieltjes integraalina. Koska sopimus määritellään markovilaisen mallin avulla, maksut riippuvat joko 1) prosessin nykyisestä tilasta tai 2) siirtymästä tilojen välillä.

1) Maksut tapahtuvat kun prosessi on tilassa j

Oletetaan, että vakuutussopimuksessa maksetaan korvauksia ja vakuutusmaksuja jatkuvasti intensiteeteillä $\overline{P}_j(t)$ ja $\overline{S}_j(t)$ prosessin $Z(t)$ ollessa tilassa j hetkellä t. Sopimuksen maksujen ja korvausten nettonykyarvo voidaan ilmaista funktion A_j generoiman mitan avulla, kun

$$A_j(t) = \int_0^t [\overline{S}_j(s) - \overline{P}_j(s)]ds.$$

Maksujen nettonykyarvo on

$$\begin{aligned} K_j(n) &= \int_0^n v(s)\mathbb{1}\left(Z(s) = j\right) dA_j(s) \\ &= \int_0^n v(s)[\overline{S}_j(s) - \overline{P}_j(s)]\mathbb{1}\left(Z(s) = j\right) ds. \end{aligned}$$

Fubinin lauseen nojalla integraalin ja odotusarvon paikkaa voidaan vaihtaa, jolloin saadaan

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n v(s)\mathbb{1}\left(Z(s) = j\right) dA_j(s)\right] = \int_0^n v(s)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left(Z(s) = j\right)\right] dA_j(s).$$

Indikaattorifunktiolle $\mathbb{1}\left(Z(s)=j\right)$ pätee

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}\left(Z(s)=j\right)\right]=\mathbb{P}\left(Z(s)=j \mid Z(0)=0\right)=P_{j_0 j}(0,s),$$

joten nettonykyarvon odotusarvo on

$$\int_0^n v(s)P_{j_0 j}(0,s)dA_j(s).$$

Huomautus 5.3. Funktion $A_j(t)$ oletetaan olevan rajoitetusti heilahteleva càdlàg-funktio.

Huomautus 5.4. Maksut voivat tapahtua myös esimerkiksi ennalta määrättyinä hetkinä, mutta yksinkertaisuuden vuoksi tutkitaan nyt vain jatkuvia maksuja. Muiden lisääminen yhtälöön kävisi helposti.

2) Maksu siirryttäessä tilasta j tilaan k

Olkoon vakuutussopimus sellainen, että siirryttäessä tilasta j tilaan k hetkellä s maksetaan korvaus $S_{jk}(s)$. Korvausten, joita maksetaan siirryttäessä tilasta j tilaan k, nettonykyarvo on

$$K_{jk}(n)=\int_0^n v(s)S_{jk}(s)dN_{jk}(s),$$

missä $N_{jk}(t)$ on määritelmän 5.4 mukainen laskuriprosessi. Koska $N_{jk}(t)$ on lemman 5.1 nojalla alimartingaali, voidaan se esittää summana sen kompensaattorista ja martingaalista.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^n v(s)S_{jk}(s)dN_{jk}(s)\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^n v(s)S_{jk}(s)d\left(\Lambda_{jk}(s)+M_{jk}(s)\right)\right],$$

missä $M(0)=0$. Proposition 3.8 nojalla

$$\int_0^n v(s)S_{jk}(s)dM_{jk}(s)$$

on martingaali, jonka odotusarvo on nolla. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^n v(s)S_{jk}(s)dN_{jk}(s)\right]&=\mathbb{E}\left[\int_0^n v(s)S_{jk}(s)d\Lambda_{jk}(s)\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_0^n v(s)S_{jk}(s)\mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)\mu_{jk}(s)ds\right]\\&=\int_0^n v(s)S_{jk}(s)P_{j_0 j}(0,s)\mu_{jk}(s)ds.\end{aligned}$$

Maksut yhtenä funktiona

Yllä esitetyt tapaukset voidaan yhdistää summaamalla kaikkien tilajoukon E alkioiden yli. Kirjoittamalla

$$A(t) = \sum_{j \in E} A_j(t) + \sum_{\substack{j,k \in E \\ j \neq k}} S_{jk}(t) N_{jk}(t), \text{ jolle}$$

$$dA(t) = \sum_{j \in E} \mathbb{1}\left(Z(t) = j\right) dA_j(t) + \sum_{\substack{j,k \in E \\ j \neq k}} S_{jk}(t) dN_{jk}(t),$$

voidaan sopimuksen maksujen nettonykyarvoa kuvata yhtenä Lebesgue-Stieltjes integraalina

$$\begin{aligned} K(n) &= \int_0^n v(s) dA(s) \\ &= \sum_{j \in E} \int_0^n \mathbb{1}\left(Z(s) = j\right) dA_j(s) + \sum_{\substack{j,k \in E \\ j \neq k}} \int_0^n S_{jk}(s) dN_{jk}(s). \end{aligned}$$

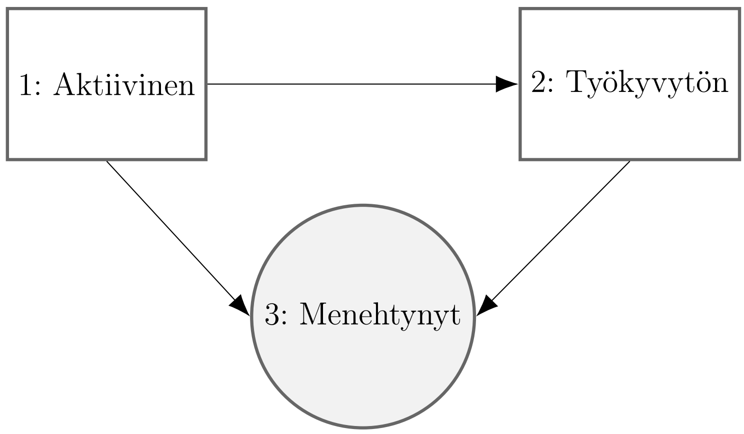
Sopimuksen nettokertamaksu P voidaan ratkaista ekvivalenssiperiaatteen nojalla yhtälöstä

$$P = \sum_{j \in E} \int_0^n v(s) P_{j_0 j}(0,s) S_j(s) ds + \sum_{\substack{j,k \in E \\ j \neq k}} \int_0^n v(s) S_{jk}(s) P_{j_0 j}(0,s) \mu_{jk}(s) ds.$$

Esimerkki 5.5. Mallinnetaan vakuutussopimusta kolmitilaisella markovilaisella mallilla (kuva 5.4). Vakuutussopimuksen vakuutusmaksu P maksetaan kerralla hetkellä 0. Oletetaan, että vakuutettu on tilassa 1 sopimuksen alkamishetkellä. Olkoon $t \in [0, n]$, missä n on sopimuksen äärellinen päättymishetki. Prosessin siirtyessä tilasta 1 tilaan 3 maksetaan korvaus $S_{13}(t)$. Vakuutetun siirtyessä tilasta 2 tilaan 3, maksetaan korvaus $S_{23}(t)$. Tilassa 2 vakuutetulle maksetaan korvausta intensiteetillä $\overline{S}_2(t)$. Oletetaan, että korkoutuvuus $\delta(t)$ on jatkuva funktio ja että siirtymäintensiteetit $\mu_{12}(t)$, $\mu_{13}(t)$ ja $\mu_{23}(t)$ ovat olemassa jatkuvina funktioina ja muut siirtymäintensiteetit ovat 0. Merkitään $P_{jm}(0,t) = P_{jm}(t)$.

Nettokertamaksu P voidaan määritellä korvausten nykyarvon odotusarvosta ekvivalenssiperiaatteen nojalla

$$\begin{aligned} P &= \int_0^n v(s) \overline{S}_2(s) P_{12}(s) ds \\ &+ \int_0^n v(s) S_{13}(s) P_{11}(s) \mu_{13}(s) ds \\ &+ \int_0^n v(s) S_{23}(s) P_{12}(s) \mu_{23}(s) ds. \end{aligned}$$



Kuva 5.4: Sopimuksen alkaessa vakuutettu on tilassa 1. Tilasta 1 voidaan siirtyä tilaan 2 tai tilaan 3. Tilasta 2 vakuutettu voi siirtyä vain tilaan 3 ja tilasta 3 ei voi siirtyä pois.

Esimerkki 5.6. Jatkoa esimerkille 5.5. Oletetaan, että siirtymäintensiteetit μ_{12}, μ_{13} ja μ_{23} ovat positiivisia vakioita ja muut siirtymäintensiteetit $(\mu_{21}, \mu_{31}, \mu_{32})$ saavat arvon nolla. Nyt pysymisintensiteeteille saadaan $\mu_{11} = -\left(\mu_{12} + \mu_{13}\right)$, $\mu_{22} = -\mu_{23}$ ja $\mu_{33} = 0$. Kuvaa katsomalla voidaan havaita, että kun $t \in (0, n]$

$$P_{33}(t) = 1 \text{ ja } P_{21}(t) = P_{31}(t) = P_{32}(t) = 0.$$

Haluamme siis ratkaista todennäköisyydet $P_{11}(t), P_{12}(t)$ ja $P_{22}(t)$, sillä

$$P_{13}(t) = 1 - P_{11}(t) - P_{12}(t) \text{ ja } P_{23}(t) = 1 - P_{22}(t).$$

Kolmogorovin forward -yhtälön (propositio 5.2) nojalla

$$\frac{\partial}{\partial u} P_{jm}(t, u) = \sum_{k \in E} P_{jk}(t, u) \mu_{km}(u),$$

joten saadaan

$$P'_{11}(t) = P_{11}(t)\mu_{11} + P_{12}(t)\mu_{21} + P_{13}(t)\mu_{31} = -\left(\mu_{12} + \mu_{13}\right) P_{11}(t), \tag{1}$$

$$P'_{12}(t) = P_{11}(t)\mu_{12} + P_{12}(t)\mu_{22} + P_{13}(t)\mu_{32} = \mu_{12}P_{11}(t) - P_{12}(t)\mu_{23} \text{ ja} \tag{2}$$

$$P'_{22}(t) = P_{21}(t)\mu_{12} + P_{22}(t)\mu_{22} + P_{23}(t)\mu_{32} = -\mu_{23}P_{22}(t). \tag{3}$$

Kun oletetaan, että prosessi on tilassa 1 hetkellä nolla, eli $P_{11}(0) = 1$ ja $P_{22}(0) = 0$, niin ensimmäisen kertaluvun lineaarisilla homogeenisilla differentiaaliyhtälöillä (1) ja (3) on tunnetusti [4, s. 9-10] ratkaisut

$$P_{11}(t) = e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}, \text{ ja } P_{22}(t) = e^{-\mu_{23}t}.$$

Sijoittamalla yhtälön (1) ratkaisu yhtälöön (2) saadaan

$$P'_{12}(t) + \mu_{23}P_{12}(t) = \mu_{12}e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}.$$

Nyt kyseessä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen epähomogeeninen differentiaaliyhtälö, jolla alkuarvolla $P_{12}(0) = 0$ on tunnetusti ratkaisu [4, s. 9-10]

$$\begin{aligned}
P_{12}(t) &= \int_0^t e^{-\int_s^t \mu_{23}du}\mu_{12}e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})s}ds \\
&= \mu_{12}\int_0^t e^{-\mu_{23}(t-s)}e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})s}ds \\
&= \mu_{12}e^{-\mu_{23}t}\int_0^t e^{-(\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23})s}ds \\
&= \frac{\mu_{12}}{\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23}}\left(e^{-\mu_{23}t} - e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}\right).
\end{aligned}$$

Nyt mallin siirtymätodennäköisyydet ovat siis

$$\begin{aligned}
&P_{11}(t) = e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}, \\
&P_{12}(t) = \frac{\mu_{12}}{\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23}}\left(e^{-\mu_{23}t} - e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}\right), \\
&P_{13}(t) = 1 - e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t} - \frac{\mu_{12}}{\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23}}\left(e^{-\mu_{23}t} - e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})t}\right), \\
&P_{21}(t) = 0, \\
&P_{22}(t) = e^{-\mu_{23}t}, \\
&P_{23}(t) = 1 - e^{-\mu_{23}t}, \\
&P_{31}(t) = P_{32}(t) = 0, \\
&P_{33}(t) = 1.
\end{aligned}$$

Nyt esimerkin 5.5 yhtälöön nettokertamaksulle P, voidaan sijoittaa tunnetut todennäköisyydet

$$\begin{aligned}
P = &\int_0^n v(s)\overline{S}_2(s)\frac{\mu_{12}}{\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23}}\left(e^{-\mu_{23}t} - e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})s}\right)ds \\
&+ \int_0^n v(s)S_{13}(s)e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})s}\mu_{13}ds \\
&+ \int_0^n v(s)S_{23}(s)\frac{\mu_{12}}{\mu_{12}+\mu_{13}-\mu_{23}}\left(e^{-\mu_{23}t} - e^{-(\mu_{12}+\mu_{13})s}\right)\mu_{23}ds.
\end{aligned}$$

Nyt jos siirtymäintensiteetit voidaan havaita, niin sopimuksen maksut voidaan määritellä.

5.4 Vastuuvelka ja Thielen yhtälö markovilaiselle mallille

Oletetaan, että vakuutussopimus mallinnetaan markovilaisella mallilla. Oletetaan että vakuutussopimus päättyy hetkellä n, $n < \infty$. Olkoon $\{\mathcal{F}_t\}$ Markovin prosessin $Z(t)$ generoima historia.

Määritelmä 5.5. Markovin prosessilla $Z(t)$ mallinnettavan sopimuksen vastuuvelka on

$$V(t) = \frac{1}{v(t)}\mathbb{E}\left[K(t,n) \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Määritelmä on kuten luvun 2 määritelmä 2.8 mutta odotusarvon sijaan maksujen erotuksen nettonykyarvosta otetaan ehdollinen odotusarvo. Ehdon $\mathcal{F}_t$ voidaan ajatella kertovan, millä hetkellä vastuuvelka määritellään.

Kun sopimusta mallinnetaan Markovin prosessilla, vastuuvelan suuruus on yhteydessä siihen, missä tilassa prosessi on. Jos tutkitaan esimerkin 5.4 sopimusta, vastuuvelan arvo (eli tulevien korvausten ja maksujen erotus), kun vakuutettu on työkyvytön on todennäköisesti erisuuri, kuin aktiivisen vakuutetun. Vastuuvelasta käytetään merkintää $V_i(t)$, jos prosessi on tilassa i hetkellä t. Filtraatio $\mathcal{F}_t$ sisältää tiedon, missä tilassa prosessi $Z(t)$ on.

Huomautus 5.5. Käytetään merkintää $V_{Z(t)}(t)$ kuvaamaan vastuuvelan arvoa hetkellä t kun prosessin tila sillä hetkellä on tuntematon.

Määritellään vastuuvelka ja Thielen yhtälö edellä monitilaiselle markovilaisella mallille, jonka maksut ovat kuten luvussa 5.3. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että nettokertamaksu P maksetaan hetkellä nolla. Sopimuksen sisältämät maksut ovat siis tilassa j intensiteetillä $\overline{S}_j$ suoritettavat korvausmaksut sekä siirtymistä johtuvat korvaukset S_{jk}.

Määritelmä 5.6. Vastuuvelka tilassa i hetkellä t on

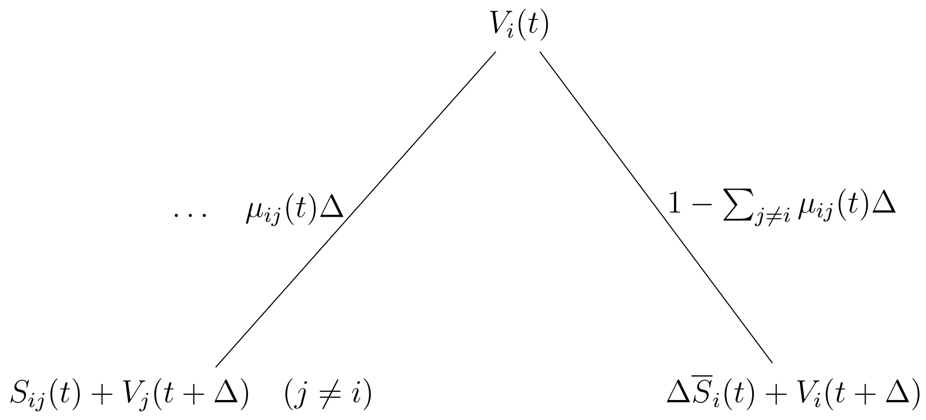
$$\begin{aligned}
V_i(t) &= \frac{1}{v(t)}\mathbb{E}\left[K(t,n) \mid Z(t) = i\right] \\
&= \sum_{j\in E}\int_t^n v(t,s)P_{ij}(t,s)dA_j(s) + \sum_{\substack{j,k\in E\\ j\neq k}}\int_t^n v(t,s)P_{ij}(t,s)\mu_{jk}(s)S_{jk}(s)ds.
\end{aligned}$$

Propositio 5.4. *Vakuutuksen Thielen yhtälö on*

$$V_i'(t) = \sum_{j\neq i}\mu_{ij}(t)\left(V_i(t) - V_j(t) - S_{ij}(t)\right) - \overline{S}_i(t) + \delta(t)V_i(t).$$

Todistus. Tulokseen viitataan Ramlau-Hansenin artikkelissa [15, s. 146]. Yhtälö on myös todistettu Norbergin artikkeleissa [10] ja [11]. □

Kuten luvussa 2.4, esitetään perustelu yhtälölle kuvalla (kuva 5.5) Lehtomaan monisteen [8] tyyliin. Termi $\mu_{ij}(t)\Delta$ edustaa todennäköisyyttä siirtyä tilasta i tilaan j pienellä aikavälillä $[t, t+\Delta)$. Tällöin maksetaan korvaus S_{ij}. Todennäköisyyttä pysyä tilassa i edustaa termi $1 - \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t)\Delta$ ja tällöin maksetaan korvausta intensiteetillä $\overline{S}_i(t)$ Δ-pituisen ajanjakson ajan.



Kuva 5.5: Oikea viiva kuvaa tilannetta, jossa vakuutettu pysyy tilassa i aikavälillä $[t, t+\Delta)$. Vasen viiva kuvaa tilanneetta, jossa prosessi siirtyy pois tilasta i tilaan j. Tilan puutteen vuoksi muita viivoja ei ole piirretty.

Muodostetaan approksimaatio

$$\begin{aligned}
V_i(t) \approx & \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t)\Delta \left(S_{ij}(t) + V_j(t + \Delta)\right) \\
& + \left(1 - \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t)\Delta\right) (1 - \delta(t)\Delta) \left(\overline{S}_i(t)\Delta + V_i(t + \Delta)\right) \\
\approx & \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t)\Delta \left(S_{ij}(t) + V_j(t + \Delta)\right) \\
& + \left(1 - \delta(t)\Delta - \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t)\Delta\right) \left(\overline{S}_i(t)\Delta + V_i(t + \Delta)\right) \\
\approx & \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t)\Delta \left(S_{ij}(t) + V_j(t + \Delta) - V_i(t + \Delta)\right) \\
& + \overline{S}_i(t)\Delta + V_i(t + \Delta) - \delta(t)\Delta V_i(t + \Delta).
\end{aligned}$$

Järjestämällä uudelleen, ja tutkimalla raja-arvoa kun $\Delta \to 0+$ saadaan

$$V_i'(t) = \sum_{j \neq i} \mu_{ij}(t) \left(V_i(t) - V_j(t) - S_{ij}(t) \right) - \overline{S}_i(t) + \delta(t) V_i(t).$$

Määritelmä 5.7. Suuretta

$$R_{ij}(t) = V_j(t) - V_i(t) + S_{ij}(t)$$

kutsutaan siirtymään tilasta i tilaan j liittyväksi *riskisummaksi.*

Thielen yhtälö voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$V_i'(t) = -\sum_{j, j \neq i} \mu_{ij}(t) R_{ij}(t) - \overline{S}_i(t) + \delta(t) V_i(t).$$

Ensimmäinen termi kuvaa menetettyjä varoja siirryttäessä muihin tiloihin, toinen termi menetyksiä kun pysytään tilassa ja viimeinen korkotuottoja olemassa olevalle vastuuvelalle.

5.5 Hattendorffin lause markovilaiselle mallille

Tässä luvussa sovelletaan Hattendorffin lausetta markovilaisella prosessilla mallinnettavalle vakuutukselle. Luvun 4 tulokset pätevät toki myös markovilaiselle mallille sellaisinaan, mutta lauseesta on mahdollista muodostaa käyttökelpoisempi versio. Esitys nojaa Ramlau-Hansenin artikkelin esitykseen [15, s. 147-149]. Oletetaan, että sopimus on hinnoiteltu ekvivalenssiperiaatteen nojalla ja nettokertamaksu P maksetaan välittömästi sopimuksen alkaessa. Siirryttäessä tilasta j tilaan k vakuutetulle maksetaan korvaus S_{jk}. Tilassa j maksetaan korvausta jatkuvasti intensiteetillä $\overline{S}_j$. Olkoon $\delta(s)$ jaktuva korkoutuvuus sopimuksen voimassaoloaikana, ja olkoon diskonttauskertoin $v(s)$ muotoa

$$v(s) = e^{-\int_0^s \delta(u) du}.$$

Kuten luvussa 4, määritellään

$$\Gamma(t) = K(t) + v(t) V_{Z(t)}(t),$$

jolloin aikavälillä $(s, t]$ syntynyt tappio on erotus

$$L(s, t) = \Gamma(t) - \Gamma(s).$$

Nyt aliluvun 5.3 tulosten nojalla

$$\Gamma(t) = -P + \sum_{j \in E} \int_0^t v(s) \mathbb{1} \left(Z(s-) = j \right) \overline{S}_j(s) ds + \sum_{j \in E} \sum_{\substack{k \in E \\ j \neq k}} v(s) S_{jk}(s) dN_{jk}(s) + v(t) V_{Z(t)}(t),$$

missä

$$dN_{jk}(t) = \mathbb{1} \left(Z(t-) = j, Z(t) = k \right).$$

Määritelmän 5.7 nojalla intensiteetit $\overline{S}_j$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\overline{S}_j(t) = \delta(t) V_j(t) - V_j'(t) - \sum_{\substack{k \in E \\ j \neq k}} \mu_{jk}(t) R_{jk}(t),$$

joten sijoittamalla tämä saadaan

$$\begin{aligned}
\Gamma(t) = &- P + \sum_{j \in E} \int_0^t v(s) \mathbb{1} \left(Z(s-) = j \right) \left(\delta(s) V_j(s) - V_j'(s) \right) ds \\
&- \sum_{j \in E} \sum_{\substack{k \in E \\ j \neq k}} \int_0^t v(s) \mathbb{1} \left(Z(s-) = j \right) \mu_{jk}(s) R_{jk}(s) ds \\
&+ \sum_{j \in E} \sum_{\substack{k \in E \\ j \neq k}} \int_0^t v(s) S_{jk}(s) dN_{jk}(s) + v(t) V_{Z(t)}(t).
\end{aligned}$$

Tutkitaan tarkemmin ensimmäistä summatermiä. Oletetaan, että Markovin prosessilla $Z(t)$ on ollut ennen hetkeä t hypyt hetkinä $T_1 < T_2 < T_3 < \ldots < T_n \leq t$, missä $n < \infty$. Olkoon $j_i = Z(T_i)$, eli tila jossa prosessi on hetkellä t. Sovitaan, että

(i) $T_0 = 0$ ja $Z(0) = j_0$, eli hetkellä nolla ei tapahdu hyppyä ja alkutila on j_0.

(ii) $T_{n+1} = t$

Lisäksi $Z(t) = j_n$, eli viimeinen hyppy ennen hetkeä t on tapahtunut hetkellä T_n ja $j_i \neq j_{i+1}$, sillä hetket T_i ovat hyppyhetkiä tilasta toiseen. Nyt ensimmäinen summatermi voidaan kirjoittaa muodossa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in E}\int_0^t v(s)\mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)\big(\delta(t)V_j(s)-V_j'(s)\big)\,ds\\
&=-\sum_{j\in E}\sum_{i=0}^{n}\int_{T_i}^{T_{i+1}} v(s)\mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)\big(V_j'(s)-\delta(s)V_j(s)\big)\,ds\\
&=-\sum_{i=0}^{n}\int_{T_i}^{T_{i+1}} v(s)V_{j_i}'(s)-v(s)\delta(s)V_{j_i}(s)ds.
\end{aligned}
$$

Indikaattori $\mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)$ ja summa $\sum_{j\in E}$ katoavat, kun tila j korvataan tilalla j_i. Diskonttauskertoimelle $v(s)=e^{-\int_0^s \delta(u)du}$ pätee

$$
v'(s)=-\delta(s)v(s).
$$

Osittaisintegrointikaavan nojalla

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=0}^{n}\int_{T_i}^{T_{i+1}} v(s)V_{j_k}'(s)-v(s)\delta(s)V_{j_k}(s)ds\\
&=-\sum_{i=0}^{n}\Big/_{T_i}^{T_{i+1}} v(s)V_{j_i}(s)ds\\
&=-\sum_{i=0}^{n}\left[v(T_{i+1})V_{j_i}(T_{i+1})-v(T_i)V_{j_i}(T_i)\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n}\big[v(T_i)V_{j_i}(T_i)-v(T_i)V_{j_{i-1}}(T_i)\big]+v(T_0)V_{j_0}(T_0)-v(T_{n+1})V_{j_n}(T_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Koska $T_0=0$, niin $V_{i_0}(T_0)=0$ ja viimeinen termi saa muodon $v(t)V_{Z(t)}(t)$. Tutkittava lauseke on nyt

$$
\sum_{i=1}^{n}\big[v(T_i)\big(V_{j_i}(T_i)-V_{j_{i-1}}(T_i)\big)\big]-v(t)V_{Z(t)}(t).
$$

Laskuriprosessi $N_{jk}(t)$ laskee siirtymien määrän tilasta j tilaan k hetkeen t asti ja

$$
dN_{jk}(t)=\mathbb{1}\left(Z(t-)=j, Z(t)=k\right),
$$

jolloin

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left[v(T_i)\left(V_{j_i}(T_i)-V_{j_{i-1}}(T_i)\right)\right]-v(t)V_{Z(t)}(t)\\
&=\sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}}\sum_{i=1}^{n}\left[v(T_i)\left(V_k(T_i)-V_j(T_i)\right)\right]\mathbb{1}\left(Z(T_i-)=j,Z(T_i)=k\right)-v(t)V_{Z(t)}(t)\\
&=\sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}}\int_0^t v(s)\left(V_k(s)-V_j(s)\right)dN_{jk}(s)-v(t)V_{Z(t)}(t).
\end{aligned}$$

Nyt prosessin $\Gamma(t)$ lauseke on

$$\begin{aligned}
\Gamma(t)=-P+&\sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}}\int_0^t v(s)\left(V_k(s)-V_j(s)\right)dN_{jk}(s)-v(t)V_{Z(t)}(t)\\
&-\sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}}\int_0^t v(s)\mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)\mu_{jk}(s)R_{jk}(s)ds\\
&+\sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}}\int_0^t v(s)S_{jk}(s)dN_{jk}(s)+v(t)V_{Z(t)}(t).
\end{aligned}$$

Koska $R_{jk}=V_k(t)-V_j(t)+S_{jk}(t)$, saadaan

$$\Gamma(t)=-P+\sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}}\left(\int_0^t v(s)R_{jk}(s)dN_{jk}(s)-\int_0^t v(s)\mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)\mu_{jk}(s)R_{jk}(s)ds\right).$$

Lemman 5.1 nojalla prosessin $N_{jk}(t)$ kompensaattori on $\Lambda_{jk}(t)=\mathbb{1}\left(Z(t-)=j\right)\mu_{jk}(t)$. Korollaarin 5.1 nojalla $M_{jk}(t)=N_{jk}(t)-\Lambda_{jk}(t)$ on neliöintegroituva martingaali ja

$$\begin{aligned}
\Gamma(t)=&-P+\sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}}\int_0^t v(s)R_{jk}(s)\left(dN_{jk}(s)-\mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)\mu_{jk}(s)ds\right)\\
=&-P+\sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}}\int_0^t v(s)R_{jk}(s)dM_{jk}(s)\\
=&-P+\sum_{j\in E}\Gamma^j(t),
\end{aligned}$$

missä

$$\Gamma^j(t) = \sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}} \int_0^t v(s)R_{jk}(s)dM_{jk}(s).$$

Lause 5.1. *Kaikilla $j \in E$, prosessin tilassa j vierailujen seurauksena, hetkeen t saakka syntyneet tappiot $\Gamma^j(t)$ ovat neliöintegroituvia, keskenään ortogonaalisia martingaaleja, joiden odotusarvo on nolla ja varianssiprosessit määritellään lausekkeella*

$$\langle \Gamma^j(t) \rangle = \sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}} \int_0^t v(s)^2 \mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)\mu_{jk}(s)R_{jk}^2(s)ds$$

Todistus. [15, s. 148] Yllä määritellyn nojalla

$$\Gamma^j(t) = \sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}} \int_0^t v(s)R_{jk}(s)dM_{jk}(s).$$

Koska M_{jk} on neliöintegroituva martingaali, jonka odotusarvo on nolla, niin proposition 3.8 nojalla summattavat integraalit ovat myös neliöintegroituvia martingaaleja, joiden odotusarvo on nolla. Neliöintegroituvien martingaalien summana myös $\Gamma^j(t)$ on neliöintegroituva martingaali. Ortogonaalisuus seuraa siitä, että martingaalit M_{jk} ovat ortogonaalisia ja kun $i \neq j$, Γ^i ja Γ^j sisältävät määritelmän nojalla joukon erillisiä martingaaleja (M_{ik} ja M_{jk}).

Proposition 3.9 nojalla

$$\left\langle \int_0^t v(s)R_{jk}(s)dM_{jk}(s) \right\rangle = \int_0^t v(s)^2 R_{jk}^2(s) d\left\langle M_{jk}(s)\right\rangle.$$

ja proposition 5.3 nojalla

$$\langle M_{jk}(t)\rangle = \Lambda_{jk}(t) = \int_0^t \mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)\mu_{jk}(s)ds,$$

joten

$$\left\langle \Gamma^j(t) \right\rangle(t) = \sum_{\substack{k\in E\\ j\neq k}} \int_0^t v(s)^2 \mathbb{1}\left(Z(s-)=j\right)\mu_{jk}(s)R_{jk}^2(s)ds.$$

□

Korollaari 5.2. *Edellisestä lauseesta seuraa, että kaikille $j, k \in E$*

(i) Prosessin $\Gamma^j(t)$ arvonmuutokset ovat korreloimattomia.

(ii) Hetkeen t saakka, prosessin ollessa tilassa j, syntyneen tappion varianssi voidaan laskea summana

$$\operatorname{Var}\left(\Gamma^j(t)\right) = \mathbb{E}\left[\left\langle \Gamma^j(t) \right\rangle\right] = \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq j}} \int_0^t v(u)^2 P_{j_0,j}(0,u)\mu_{jk}(u) R_{jk}^2(u)du.$$

(iii) $\Gamma^j(t)$ ja $\Gamma^k(t)$ ovat korreloimattomia, kun $j \neq k$.

(iv) $\Gamma(t) = -P + \sum_{j\in E} \Gamma^j(t)$ on neliöintegroituva martingaali ja $\mathbb{E}\left[\Gamma(t)\right] = 0$.

(v) Kokonaistappion varianssi voidaan laskea summana

$$\operatorname{Var}\left(\Gamma(t)\right) = \sum_{j\in E} \operatorname{Var}\left(\Gamma^j(t)\right) = \sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ k\neq j}} \int_0^t v(u)^2 P_{j_0,j}(0,u)\mu_{jk}(u) R_{jk}^2(u)du.$$

Korollaari 5.3. *Olkoon $0 = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_m = n$, missä $m < \infty$, välin $[0, n]$ ositus. Merkitään*

$$L_i = L\left(t_{i-1}, t_i\right) = \Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})$$

välillä $(t_{i-1}, t_i]$ syntyneelle tappiolle, kun $0 < i \leq m$. Olkoon $0 < h < i < l \leq m$ ja $j, k \in E, j \neq k$. Nyt, koska tappio välillä $(t_{i-1}, t_i]$ on neliöintegroituvan martingaalin lisäys, niin liitteen A tulosten nojalla tappio i:nnelle välille voidaan laskea summana

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(L_i\right) &= \operatorname{Var}\left(\sum_{j\in E} \Gamma^j(t_i) - \Gamma^j(t_{i-1})\right) \\
&= \sum_{j\in E} \operatorname{Var}\left(\Gamma^j(t_i) - \Gamma^j(t_{i-1})\right) \\
&= \sum_{j\in E} \mathbb{E}\left[\left\langle \Gamma^j(t_i)\right\rangle - \left\langle \Gamma^j(t_{i-1})\right\rangle\right] \\
&= \sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ k\neq j}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(u)^2 P_{j_0,j}(0,u)\mu_{jk}(u) R_{jk}^2(u)du.
\end{aligned}$$

6 Lauseen soveltaminen kolmitilaisessa markovilaisessa mallissa

Jatkamme esimerkin 5.6 mukaisen kolmitilaisen mallin käsittelyä. Lasketaan ensin Hattendorffin lauseen nojalla arvot vuosittaisille tappioille. Simuloidaan R:llä [18] 100000 asetelman mukaista markovilaista prosessia ja lasketaan kunkin prosessin tuottamat tappiot vuosittain. Verrataan simulaation tuottamien tappioiden vuosittaisia odotusarvoja sekä otosvariansseja teoreettisiin vastineisiin. Simulaatioihin ja teoreettisten vastineiden laskemiseen käytetty R-koodi löytyy liitteestä B. Simulaatiossa käytettävän paketin kuvaus löytyy viitteestä [6].

6.1 Mallin määrittely

Oletetaan, että sopimusaika on 10 vuotta, ja että työkyvyttömälle vakuutetulle maksetaan korvausta intensiteetillä $\overline{S}_2 = 100$ ja kuoleman seurauksena maksetaan korvaus $S = 1000$. Sopimuksen vakuutusmaksu P määritellään ekvivalenssiperiaatteen (määritelmä 2.5) nojalla, ja maksetaan yhdellä kertaa hetkellä 0. Olkoon vuosittainen korkoutuvuus $\delta(t)$ vakio 0.05, jolloin diskonttauskerroin saa muodon

$$v(s,t) = e^{-0.05(t-s)}.$$

Oletamme, että henkivakuutussopimusta mallinnetaan Markovin prosessilla $Z(t)$, joka saa arvonsa tila-avaruudella $E = \{1,2,3\}$ ja hetkellä nolla prosessi on tilassa 1. Lisäksi oletetaan, että Markovin prosessin siirtymätodennäköisyydet ovat aikahomogeenisia, eli kun $j,k \in E$

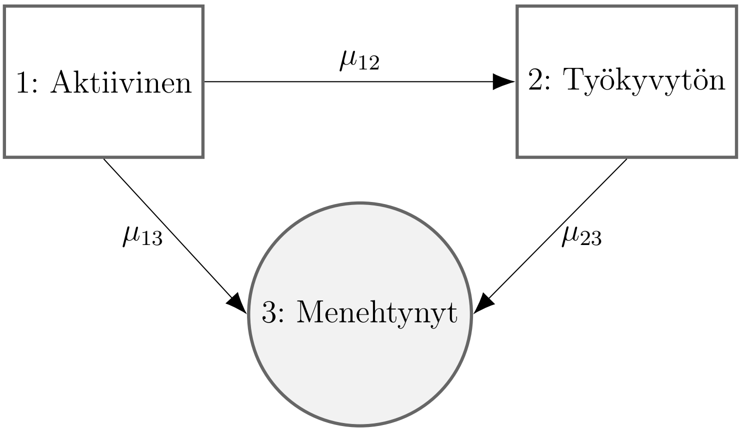
$$\mathbb{P}(Z(t) = j \mid Z(s) = k) = \mathbb{P}(Z(t-s) = j \mid Z(0) = k).$$

Oletetaan, että siirtymäintensiteetit μ_{12}, μ_{13} ja μ_{23} ovat vakioita ja muut siirtymäintensiteetit saavat arvon 0. Havainnollistetaan asetelmaa kuvalla 6.1.

Mallin intensiteettimatriisi Q on

$$Q = \begin{bmatrix} -(\mu_{12}+\mu_{13}) & \mu_{12} & \mu_{13} \\ 0 & -\mu_{23} & \mu_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.044 & 0.006 \\ 0 & -0.16 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esimerkin 5.6 nojalla siirtymätodennäköisyydet voidaan ilmaista siirtymäintensiteettien



Kuva 6.1: Vakuutetun ollessa työkyvytön, eli prosessin ollessa tilassa 2 vakuutetulle maksetaan korvausta vakiointensiteetillä $\overline{S}_2$. Vakuutetun menehtyessä, eli prosessin siirtyessä tilasta 1 tai tilasta 2 tilaan 3 maksetaan korvaus S. Nuolet kuvaavat mahdollisia siirtymisiä, prosessi ei esimerkiksi voi siirtyä tilasta 2 tilaan 1.

avulla

$$
\begin{aligned}
P_{11}(t) &= e^{-0.05t}, \\
P_{12}(t) &= 0.4\left(e^{-0.05t} - e^{-0.16t}\right), \\
P_{13}(t) &= 1 - e^{-0.05t} - 0.4\left(e^{-0.05t} - e^{-0.16t}\right) \\
&= 1 - 1.4e^{-0.05t} + 0.4e^{-0.16t}, \\
P_{21}(t) &= 0, \\
P_{22}(t) &= e^{-0.16t}, \\
P_{23}(t) &= 1 - e^{-0.16t}, \\
P_{31}(t) &= 0, \\
P_{32}(t) &= 0, \\
P_{33}(t) &= 1.
\end{aligned}
$$

Nettokertamaksu P voidaan ratkaista ekvivalenssiperiaatteen nojalla, kun korvaukset tunnetaan:

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^{15} v(s)\left((\overline{S}_2 P_{12}(s) + SP_{11}(s)\mu_{13} + SP_{12}(s)\mu_{23}\right) ds \\
&= \int_0^{15} e^{-0.05s}\left(40\left(e^{-0.05s} - e^{-0.16s}\right) + 6e^{-0.05s} + 64\left(e^{-0.05s} - e^{-0.16s}\right)\right) ds \\
&= 260.739\ldots \\
&\approx 260.74.
\end{aligned}$$

Vastuuvelka heti sopimuksen alkamishetken jälkeen on $V(0+) = P \approx 260.74$ ja sopimuksen päättymishetkellä vastuuvelka poistuu, eli $V(10) = 0$. Muina hetkinä vastuuvelan arvo määräytyy prosessin sen hetkisen tilan mukaan. Prosessin ollessa tilassa 3 vakuutettu on kuollut, ja vastuuvelka on nolla, eli $V_3(t) = 0$ kaikilla $t \in (0, 10]$. Prosessin ollessa tilassa 1 tai 2 hetkellä t, kun $t \in (0, 10)$, vastuuvelka on määritelmän 5.6 nojalla

$$V_i(t) = \sum_{j \in E} \int_t^n v(t,s) P_{ij}(t,s) dA_j(s) + \sum_{\substack{j,k \in E \\ j \neq k}} \int_t^n v(t,s) P_{ij}(t,s) \mu_{jk}(s) S_{jk}(s) ds.$$

Ne termit, joissa intensiteetti, siirtymätodennäköisyys tai korvaus saa arvokseen nolla katoavat, jolloin vastuuvelka saa muodon

$$\begin{aligned}
V_i(t) = &\int_t^{10} v(t,s) P_{i2}(t,s) \cdot \overline{S}_2 ds + \int_t^{10} v(t,s) P_{i1}(t,s) \mu_{13} S_{13} ds \\
&+ \int_t^{10} v(t,s) P_{i2}(t,s) \mu_{23} S_{23} ds.
\end{aligned}$$

Koska siirtymätodennäköisyydet oletettiin homogeenisiksi, niin $P_{ij}(t,s) = P_{ij}(0, s-t)$. Korvaukset S_{13} ja S_{23} asetettiin yhtä suuriksi $S_{13} = S_{23} = S$. Lisäksi

$$v(t,s) = e^{-i(s-t)} = v\left(0, (s-t)\right) = v\left(s-t\right),$$

joten kun yhdistetään integraalien summa yhdeksi integraaliksi saadaan

$$V_i(t) = \int_t^{10} v\left(s-t\right)\left(\mu_{13} S P_{i1}\left(0, s-t\right) + \left(\overline{S}_2 + \mu_{23} S\right) P_{i2}\left(0, s-t\right)\right) ds$$

Tehdään muuttujanvaihto $(s-t) \to u$, jolloin

$$V_i(t) = \int_0^{10-t} v\left(u\right)\left(S\mu_{13} P_{i1}(u) + \left(\overline{S}_2 + \mu_{23} S\right) P_{i2}(u)\right) du$$

Sijoittamalla $S = 1000$, $\overline{S}_2 = 100$, intensiteettien arvot $\mu_{13} = 0.006$, $\mu_{23} = 0.16$, ja korko $i = 0.05$ saadaan

$$V_i(t) = \int_0^{10-t} e^{-0.05u} \left(6P_{i1}(u) + 260P_{i2}(u)\right) du$$

Nyt vastuuvelan arvo voidaan määritellä millä tahansa hetkellä $t \in (0, 10)$ lausekkeista

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \int_0^{10-t} e^{-0.05u} \left(6P_{11}(u) + 260P_{12}(u)\right) du \\ V_2(t) &= \int_0^{10-t} e^{-0.05u} 260P_{22}(u) du \end{aligned}$$

6.2 Teoreettiset vastineet tappion variansseille

Aikavälillä $[0, 10]$ syntyneen tappion varianssi on korollaarin 5.2 nojalla

$$\mathrm{Var}\left(\Gamma(n)\right) = \sum_{j \in E} \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq j}} \int_0^{10} v(u)^2 P_{j_0,j}(0, u) \mu_{jk}(u) R_{jk}^2(u) du.$$

Lauseke sieventyy muotoon

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left(\Gamma(n)\right) = &\int_0^{10} v(u)^2 P_{11}(u) \mu_{12} R_{12}^2(u) du \\ &+ \int_0^{10} v(u)^2 P_{11}(u) \mu_{13} R_{13}^2(u) du \\ &+ \int_0^{10} v(u)^2 P_{12}(u) \mu_{23} R_{23}^2(u) du, \end{aligned}$$

kun ne termit, joissa intensiteetti tai siirtymätodennäköisyys on nolla, katoavat. Määritelmän 5.7 nojalla

$$R_{jk}(t) = V_k(t) - V_j(t) + S_{jk}(t),$$

joten

$$\begin{aligned} R_{12}(t) &= V_2(t) - V_1(t) + S_{12}(t) = V_2(t) - V_1(t) \\ R_{13}(t) &= V_3(t) - V_1(t) + S_{13}(t) = -V_1(t) + S \\ R_{23}(t) &= V_3(t) - V_2(t) + S_{12}(t) = -V_2(t) + S. \end{aligned}$$

Varianssi koko sopimusaikana syntyvälle tappiolle voidaan ratkaista

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\Gamma(n)\right) &= \int_0^{10} v(u)^2 P_{11}(u)\mu_{12}\left(V_2(t)-V_1(t)\right)^2 du \\ &+ \int_0^{10} v(u)^2 P_{11}(u)\mu_{13}\left(-V_1(t)+S\right)^2 du \\ &+ \int_0^{10} v(u)^2 P_{12}(u)\mu_{23}\left(-V_2(t)+S\right)^2 du \\ &= 111016.3.\end{aligned}$$

Välin $(t_{i-1}, t_i]$ tappio L_i saadaan korollaarin 5.3 nojalla yhtälöstä

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(L_i\right) =& \sum_{j\in E}\sum_{\substack{k\in E\\ k\neq j}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(u)^2 P_{j_0,j}(0,u)\mu_{jk}(u)R_{jk}^2(u)du \\ =& \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(u)^2 P_{11}(u)\mu_{12}\left(V_2(t)-V_1(t)\right)^2 du \\ &+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(u)^2 P_{11}(u)\mu_{13}\left(-V_1(t)+S\right)^2 du \\ &+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} v(u)^2 P_{12}(u)\mu_{23}\left(-V_2(t)+S\right)^2 du.\end{aligned}$$

Taulukossa 6.1 on listattu jokaisen sopimusvuoden tappion varianssi. Kuten korollaari 5.3 toteaa

$$\sum_{i=1}^{10} \mathrm{Var}\left(L_i\right) = 111016.3 = \mathrm{Var}(\Gamma(10)).$$

6.3 Simulaatio

Simuloidaan R:llä 100000 realisaatiota kolmitilaisesta jatkuva-aikaisesta markovilaisesta mallista intensiteettimatriisilla Q mallintamaan 100000 asetelman mukaista vakuutussopimusta. Luodaan funktio laskemaan syntynyt tappio halutulla aikavälillä ja lasketaan keskiarvo jokaisena vuotena syntyneistä tappioista sekä otosvarianssi. Tappio on kuten määritelmässä 2.9

$$L(s,t) = K(s,t) + v(t)V(t) - v(s)V(s),$$

missä $K(s,t)$ kuvaa välillä tapahtuneita maksuja ja V on vastuuvelka määrittelyhetkellä, eli se on riippuvainen simuloidun prosessin sen hetkisestä tilasta.

vuosi (i)	Var (L_i)
1	24516.51
2	20290.14
3	16367.74
4	12798.50
5	9657.65
6	7057.26
7	5159.94
8	4196.54
9	4489.35
10	6482.67

Taulukko 6.1: Mallista lasketut teoreettiset vastineet variansseille. Joka rivillä on kyseisen sopimusvuoden tappion varianssi. Kuten Hattendorffin lause toteaa, koko sopimusajan tappion varianssi on summa vuosittaisten tappioiden variansseista.

Taulukossa 6.2 on laskettu jokaiselle sopimusvuodelle simuloituja polkuja vastaavien tappioiden keskiarvo. Jokaisen sopimusvuoden tappioiden keskiarvo on hyvin lähellä nollaa, mikä on yhtäpitävää Hattendorffin lauseen väitteen kanssa. Koko sopimuskauden tappioiden keskiarvo, mikä on yhtä suuri kuin summa vuosittaisista keskiarvoista, on 0.45, mikä tukee oletusta, että sopimuksen maksut on määritelty ekvivalenssiperiaatteen nojalla.

vuosi	Otoskeskiarvo vuoden tappiolle
1	0.15
2	0.37
3	0.23
4	0.18
5	0.11
6	0.14
7	0.31
8	-0.55
9	-0.21
10	-0.27

Taulukko 6.2: Simuloituja polkuja vastaavien sopimusten realisaatioiden tuottamien tappioiden keskiarvo jokaiselle sopimusvuodelle. Summa vuosittaisista keskiarvoista on 0.45.

Taulukossa 6.3 on simuloiduista tappioista lasketut otosvarianssit sekä teoreettiset vastineet jokaiselle sopimusvuodelle. Taulukosta 6.4 löytyy simuloitujen polkujen koko so-

vuosi	Otosvarianssi	Laskettu varianssi
1	30923.10	24516.51
2	26398.22	20290.14
3	21934.43	16367.74
4	17887.89	12798.50
5	14353.58	9657.65
6	11382.65	7057.26
7	9248.51	5159.94
8	7564.86	4196.54
9	7583.77	4489.35
10	9247.59	6482.67

Taulukko 6.3: Simuloitujen polkujen mallintamien sopimusten tuottamien tappioiden otosvarianssi jokaiselle sopimusvuodelle, sekä teoreettiset vastineet (jotka löytyvät myös taulukosta 6.1).

pimusajalla tuottamien tappioiden otosvarianssi sekä summa sopimusvuosien tappioiden otosvariansseista. Tämän perusteella näyttää siltä, että Hattendorffin lause pätee simuloiduille poluille: kokonaistappion varianssi on 156541.00, mikä on hyvin lähellä summaa vuosittaisista variansseista, joka on 156524.60. Toisaalta simuloimalla saatu varianssi koko sopimusajalle on n. 41 prosenttia suurempi, kuin sen teoreettinen vastine, joka on 111016.3.

Koko sopimusajan tappioiden otosvarianssi	Summa vuosittaisten tappioiden otosvariansseista
156541.00	156524.60

Taulukko 6.4: Simuloiduista poluista laskettujen kokonaistappioiden otosvarianssi sekä summa erillisten sopimusvuosien tappioiden otosvariansseista.

6.4 Johtopäätökset

Hattendorffin lauseen tulos vuosittaisten tappioiden odotusarvolle nolla näyttää pitävän paikkansa simuloitujen tappioiden odotusarvojen osalta (taulukko 6.2). Voidaan siis olettaa, että tällaisessa mallissa, kun vakuutettuja on suuri joukko, yhtiön vuosittain kokeman tappion odotusarvo on nolla. Kun sopimus hinnoitellaan niin, että ekvivalenssiyhtälöön lisätään varmuuslisiä, voidaan tappion todennäköisyyttä pienentää.

Simuloitujen polkujen mallintamien sopimusten tuottamien tappioiden otosvarianssit eri sopimusvuosina eivät täysin vastaa niiden numeerisia vastineita (taulukko 6.3). Suurusluokka on saman kaltainen, mutta simulaatioissa esiintyy enemmän heilahtelua. Simulaatioista laskettu otosvarianssi koko sopimusajan tappioille (156541.0) on selvästi suurempi kuin mallioletuksesta laskettu varianssi (111016.3). Ero on huomattava, eikä tämän simulaation perusteella voitaisi luottaa Hattendorffin lauseen avulla laskettavaan varianssiin. Toisaalta simuloitujen vuosittaisten tappioiden otosvarianssien summa on lähellä koko sopimusajan tappion otosvarianssin kanssa (taulukko 6.4), mikä on yhtäpitävää Hattendorffin lauseen kanssa.

Hattendorffin lause näyttää siis pätevän simuloitujen polkujen mallintavien sopimusten tappioille. Simuloidut arvot eivät kuitenkaan ole täysin yhteneviä teoreettisten vastineiden kanssa. Simulaatiossa käytettävä mallioletus on hyvin yksinkertainen, sillä maksut tapahtuvat tilaa 2 lukuun ottamatta suurina kertamaksuina, mikä saattaa lisätä arvojen hajontaa. Tällainen kolmitilainen malli, missä työkyvytön ei voi palata terveeksi ei myöskään tosi elämässä ole useinkaan realistinen, mutta yksinkertaisuuden vuoksi rajoituttiin tällaiseen asetelmaan.

Viitteet

[1] M. Beiglböck, W. Schachermayer, and B. Veliyev: A short proof of the Doob-Meyer theorem. Stochastic Processes and their Applications, 122(4), 1204-1209, 2012.

[2] M. Carter and B. van Brunt: The Lebesgue-Stieltjes Integral, Springer-Verlag, 2000.

[3] Hans U. Gerber: Life Insurance Mathematics, Springer-Verlag, 1990.

[4] Mats Gyllenberg, Lasse Lamberg, Petri Ola, Petteri Piiroinen: Tavalliset Differentiaaliyhtälöt, luentomuistiinpanot, 2016.

[5] Konstantin Izyurov: Probability Theory, lecture notes, 2018.

[6] Christopher Jackson: Multi-state modelling with R: the msm package, 2019 haettu 20.5.2020
`https://cran.r-project.org/web/packages/msm/vignettes/msm-manual.pdf`

[7] Jaakko Lehtomaa: Advanced Life Insurance Mathematics, luentomuistiinpanot, 2019.

[8] Jaakko Lehtomaa: Life Insurance Mathematics 2, luentomuistiinpanot, 2019.

[9] Angus S. Macdonald: Hattendorff's theorem, Encyclopedia Of Actuarial Science, Volume 2 2014, 798-799

[10] Ragnar Norberg: Hattendorff's theorem and Thiele's differential equation generalized, Scandinavian Actuarial Journal, 1992:1, 2-14.

[11] Ragnar Norberg: Addendum to Hattendorff's theorem and Thiele's differential equation generalized SAJ 1992 2-14, Scandinavian Actuarial Journal, 1996:1, 50-53.

[12] Harri Nyrhinen: Life Insurance Mathematics 1, luentomuistiinpanot, 2018.

[13] Martti Pesonen, Pentti Soininen ja Tapani Tuominen: Henkivakuutusmatematiikka, 2. painos, Yliopistopaino Oy, 2000.

[14] Jukka Rantala, Teivo Pentikäinen: Vakuutusoppi, Finva, 2009.

[15] Henrik Ramlau-Hansen, Hattendorff's Theorem: A Markov chain and counting process approach, Scandinavian Actuarial Journal,1988:1-3, 143-156.

[16] Tommi Sottinen: Todennäköisyysteoria, luentomuistiinpanot, 2006.

[17] Finlex, Laki vakuutusyhtiölain 31 luvun muuttamisesta, haettu 16.5.2020 https://www.finlex.fi/fi/laki/alkup/2012/20120701

[18] R Core Team (2020). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL https://www.R-project.org/

A Aputuloksia neliöintegroituville martingaaleille

Tässä liitteessä todistetaan työn kannalta Hattendorffin lauseen kannalta oleellisia tuloksia neliöintegroituvien martingaalien arvonmuutoksille. Olkoon $t \in [0, \infty)$ ja olkoon $M(t)$ martingaali filtraation $\{\mathcal{F}_t\}$ suhteen. Oletetaan, että martingaali $M(t)$ on neliöintegroituva ja rajoitetusti heilahteleva càdlàg-martingaali. Olkoon $n \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$ ja $m, n < \infty$. Määritellään välin $[0, n]$ äärellinen ositus osaväleihin $(t_{k-1}, t_k]$, missä

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = n.$$

Merkitään martingaalin $M(t)$ arvonmuutosta välillä $(t_{j-1}, t_j]$ lyhenteellä

$$\Delta_j M = M(t_j) - M(t_{j-1}).$$

Propositio A.1. *Olkoon $i < j < m$. Arvonmuutokselle $\Delta_j M$ pätee*

$$\mathbb{E}\left[\Delta_j M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0.$$

Todistus. Odotusarvon lineaarisuuden nojalla erotuksen odotusarvo voidaan jakaa odotusarvojen erotukseksi

$$\mathbb{E}\left[\Delta_j M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[M(t_j) - M(t_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[M(t_j) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] - \mathbb{E}\left[M(t_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Koska $M(t)$ on martingaali, niin martingaaliominaisuus pätee:

$$\mathbb{E}\left[M(t_j) \mid \mathcal{F}_{t_{j-i}}\right] = M(t_{j-i}).$$

Toisaalta, mitallisuuden perusteella myös $\mathbb{E}\left[M(t_{j-i}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-i}}\right] = M(t_{j-i})$, joten

$$\mathbb{E}\left[\Delta_j M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = M(t_i) - M(t_i) = 0.$$

□

Propositio A.2. *Olkoon $i < j < l \leq m$. Kaikille filtraation $\{\mathcal{F}_t\}$ suhteen sopiville, neliöintegroituville stokastisille prosesseille $H(t)$ pätee*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=j}^{l} H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0.$$

Todistus. Odotusarvon lineaarisuuden (propositio 3.3) nojalla summa voidaan ottaa odotusarvon ulkopuolelle.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=j}^{l} H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = \sum_{k=j}^{l} \mathbb{E}\left[H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]$$

Proposition 3.4 nojalla odotusarvon sisälle voidaan lisätä hienommalla sigma-algebralla varustettu odotusarvo

$$\sum_{k=j}^{l} \mathbb{E}\left[H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = \sum_{k=j}^{l} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Koska prosessin $H(t_{k-1})$ on $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-mitallinen, niin yllä oleva voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{k=j}^{l} \mathbb{E}\left[H(t_{k-1}) \cdot \mathbb{E}\left[\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Proposition A.1 nojalla $\mathbb{E}\left[\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] = 0$, joten

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=j}^{l} H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = \sum_{k=j}^{l} \mathbb{E}\left[H(t_{k-1}) \cdot 0 \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0.$$

$\square$

Propositio A.3. *Kahden erillisellä aikavälillä tapahtuvaa arvonmuutosta ovat korreloimattomia, eli kun $i < j < k \leq m$, niin*

$$\operatorname{Cov}\left(\Delta_j M, \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = 0.$$

Todistus. Ehdollinen kovarianssi määritellään kuten tavallinen kovarianssi, mutta käyttäen ehdollisia odotusarvoja. Saadaan

$$\operatorname{Cov}\left(\Delta_j M, \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\Delta_j M - \mathbb{E}\left[\Delta_j M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right)\left(\Delta_k M - \mathbb{E}\left[\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Proposition A.1 nojalla $\mathbb{E}\left[\Delta_j M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0$ ja $\mathbb{E}\left[\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0$, joten yllä oleva sieventyy muotoon

$$\operatorname{Cov}\left(\Delta_j M, \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \mathbb{E}\left[\Delta_j M \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Kuten proposition A.1 todistuksessa, ehdollisen odotusarvon sisään voidaan lisätä toinen, hienommalla sigma-algebralla varustettu ehdollinen odotusarvo

$$\mathbb{E}\left[\Delta_j M \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\Delta_j M \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Arvonmuutos $\Delta_j M$ on kahden $\mathcal{F}_{t_j}$-mitallisen satunnaismuuttujan erotuksena $\mathcal{F}_{t_j}$-mitallinen. Oletuksen nojalla $j < k$, joten $j \leqslant k-1$, jolloin $\mathcal{F}_{t_j} \subseteq \mathcal{F}_{t_{k-1}}$. Arvonmuutos $\Delta_j M$ on siten myös $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ mitallinen, joten proposition 3.4 nojalla se voidaan ottaa ulos sisemmästä ehdollisesta odotusarvosta

$$\mathbb{E}\left[\Delta_j M \mathbb{E}\left[\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Jälleen, proposition A.1 nojalla $\mathbb{E}\left[\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right]$ on nolla, joten

$$\operatorname{Cov}\left(\Delta_j M, \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \mathbb{E}\left[\Delta_j M \cdot 0 \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = 0.$$

$\square$

Propositio A.4. *Olkoon $i < j < l \leq m$. Kaikille filtraation $\{\mathcal{F}_t\}$ suhteen sopiville, neliöintegroituville stokastisille prosesseille $H(t)$ pätee*

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=j}^{l} H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=j}^{l} H^2(t_{k-1})\mathbb{E}\left[(\Delta_k M)^2 \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Todistus. Ehdolliselle varianssille pätevät varianssin laskusäännöt, joten

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\sum_{k=j}^{l} H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) =& \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=j}^{l} H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right)^2\right] \\ &- \mathbb{E}\left[\sum_{k=j}^{l} H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]^2.\end{aligned}$$

Proposition A.2 nojalla summan toinen termi on nolla. Jäljelle jäävä termi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k_1=j}^{l}\sum_{k_2=j}^{l} H(t_{k_1-1})H(t_{k_2-1})\Delta_{k_1} M \Delta_{k_2} M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Yllä olevaan ehdolliseen odotusarvoon voidaan taas lisätä hienommalla sigma-algebralla varustettu ehdollinen odotusarvo sisään. Olkoon $t_{k_1} \vee t_{k_2}$ ajanhetkistä t_{k_1}, ja t_{k_2} suurempi, jolloin molemmat $H(t_{k_1-1})$ ja $H(t_{k_2-1})$ ovat $\mathcal{F}_{t_{k_1} \vee t_{k_2}}$ mitallisia. Nyt yllä oleva saa muodon

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k_1=j}^{l}\sum_{k_2=j}^{l} H(t_{k_1-1})H(t_{k_2-1})\mathbb{E}\left[\Delta_{k_1} M \Delta_{k_2} M \mid \mathcal{F}_{t_{k_1-1} \vee t_{k_2-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Odotusarvon lineaarisuuden nojalla yllä oleva on summa odotusarvoja tuloista $H(t_{k_1-1})H(t_{k_2-1})\mathbb{E}\left[\Delta_{k_1} M \Delta_{k_2} M \mid \mathcal{F}_{t_{k_1-1} \vee t_{k_2-1}}\right]$ kaikilla mahdollisilla k_1:n ja k_2: arvoilla. Summattavana on kolmenlaisia termejä:

(i) Oletetaan, että $k_1 < k_2$. Nyt $k_1 \leq k_2 - 1$, jolloin

$$\mathbb{E}\left[\Delta_{k_1} M \Delta_{k_2} M \mid \mathcal{F}_{t_{k_1-1} \vee t_{k_2-1}}\right] = \Delta_{k_1} M \mathbb{E}\left[\Delta_{k_2} M \mid \mathcal{F}_{t_{k_1-1} \vee t_{k_2-1}}\right].$$

Lemman A.1 nojalla $\mathbb{E}\left[\Delta_{k_2} M \mid \mathcal{F}_{t_{k_1-1}\vee t_{k_2-1}}\right]$ saa arvon nolla, jolloin myös yllä oleva saa arvon nolla ja

$$\mathbb{E}\left[H(t_{k_1-1})H(t_{k_2-1})\mathbb{E}\left[\Delta_{k_1} M \Delta_{k_2} M \mid \mathcal{F}_{t_{k_1-1}\vee t_{k_2-1}}\right] \mid \mathcal{F}_i\right] = 0.$$

(ii) Oletetaan, että $k_2 < k_1$. Yllä oleva päättely voidaan toistaa, jolloin odotusarvo saa taas arvokseen nolla.

(iii) Oletetaan, että $k_1 = k_2 = k$.

$$H(t_{k_1-1})H(t_{k_2-1})\mathbb{E}\left[\Delta_{k_1} M \Delta_{k_2} M \mid \mathcal{F}_{t_{k_1-1}\vee t_{k_2-1}}\right] = H^2(t_{k-1})\mathbb{E}\left[(\Delta_k M)^2 \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right].$$

Koska muut termit katoavat, jäljelle jää vain ne, joissa $k_1 = k_2$, jolloin

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=j}^{l} H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=j}^{l} H^2(t_{k-1})\mathbb{E}\left[(\Delta_k M)^2 \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

□

Korollaari A.1. *Olkoon $i < j < l \leq m$. Tällöin pätee*

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=j}^{l} \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \sum_{k=j}^{l} \operatorname{Var}\left(\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right).$$

Todistus. Proposition A.4 nojalla

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=j}^{l} H(t_{k-1})\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=j}^{l} H^2(t_{k-1})\mathbb{E}\left[(\Delta_k M)^2 \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Valitsemalla $H(t_k) = 1$ saadaan

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=j}^{l} \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=j}^{l} \mathbb{E}\left[(\Delta_k M)^2 \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Odotusarvon lineaarisuuden nojalla summan ja odotusarvon paikkoja voidaan vaihtaa. Koska $i \leq k-1$, proposition 3.4 nojalla

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=j}^{l} \mathbb{E}\left[(\Delta_k M)^2 \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = \sum_{k=j}^{l} \mathbb{E}\left[(\Delta_k M)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].$$

Koska $\mathbb{E}[\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}] = 0$ kaikilla $k \in [0, n]$, niin myös $\mathbb{E}[\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}]^2 = 0$, jolloin voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\sum_{k=j}^{l} \Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) &= \sum_{k=j}^{l} \mathbb{E}\left[(\Delta_k M)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \\
&= \sum_{k=j}^{l} \left(\mathbb{E}\left[(\Delta_k M)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] - \mathbb{E}[\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i}]^2\right) \\
&= \sum_{k=j}^{l} \operatorname{Var}(\Delta_k M \mid \mathcal{F}_{t_i})
\end{aligned}$$

□

Seuraava korollaari on proposition 3.10 erikoistapaus, jonka avulla voidaan laskea martingaalin arvonmuutoksen varianssi.

Korollaari A.2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\Delta_j M \mid \mathcal{F}_{t_i}) &= \mathbb{E}[\langle M(t_j)\rangle - \langle M(t_{j-1})\rangle \mid \mathcal{F}_{t_i}] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} d\langle M(u)\rangle \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].
\end{aligned}$$

Todistus. Valitsemalla $H(u) = \mathbb{1}_{(t_{j-1}, t_j]}(u)$ saadaan

$$\operatorname{Var}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} H(u) dM(u) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} H^2(u) d\langle M(u)\rangle \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} d\langle M(u)\rangle \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Koska

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} dM(u) = M(t_j) - M(t_{j-1}),$$

saadaan

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\Delta_j M \mid \mathcal{F}_{t_i}) &= \operatorname{Var}(M(t_j) - M(t_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{t_i}) \\
&= \operatorname{Var}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} dM(u) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} d\langle M(u)\rangle \mid \mathcal{F}_{t_i}\right].
\end{aligned}$$

□

B R-koodi luvun 6 simulaation ja laskujen tueksi

Tästä liitteestä löytyy keskeisimmät R-koodit simulaatioin toisintamiseen sekä teoreettisten vastineiden laskemiseen.

Teoreettiset vastineet

```
#nettokertamaksu P
integroitava <- function(s){
  v(0,s)*S2*P12(s)+v(0,s)*S*P11(s)*mu13+v(0,s)*S*P12(s)*mu23
}
P<- integrate(integroitava,a,b)[[1]]

#syntyneet kulut, kun keskeyttämätön viipyminen tilassa 2
apus2 <- function(s){
  v(0,s)*S2
}
sojourn2 <- function(m,n){
  arvo<-integrate(apus2, m,n)
  arvo[[1]]
}

#vastuuvelka tilassa 1
apu1<- function(s){
  v(0,s)*S2*P12(s)+v(0,s)*S*P11(s)*mu13+v(0,s)*S*P12(s)*mu23
}
vastuuvelka1 <- function(t){
  vastuuvelka1arvo <- integrate(apu1 , a, (b-t))
  vastuuvelka1arvo[[1]]
}

#vastuuvelka tilassa 2
apu2<- function(s){
  v(0,s)*((S2+mu23*S)*P22(s))
}
vastuuvelka2 <- function(t){
  vastuuvelka2arvo<-integrate(apu2 , a, (b-t))
  vastuuvelka2arvo[[1]]
}
```

```
  #tappio hetkien (0,s) välillä
  integroitavaTappio <- function(s){
    (v(0,s)^2)*(P11(s)*(mu12*(vastuuvelka2(s)-vastuuvelka1(s))^2
        -mu13*(-1*vastuuvelka1(s)+S)^2)
        +P12(s)*mu23*(-vastuuvelka2(s)+S)^2)
  }

  #välin (a,n) tappion varianssi
  tappionVarianssiHetkeen <- function(n){
    tappioArvo <-  integrate(Vectorize(integroitavaTappio), a,n)
    tappioArvo[[1]]
  }
```

Simulaatio

```
#funktio kustannusfunktio(n) laskee maksut hetkeen n asti
#funktio prosessi(t) määrittelee prosessin tila hetkellä t
#vastuuvelka(n) funktio määrittelee vastuuvelan prosessin tilasta

#Tappio välillä (m,n)
tappio <- function(m,n){
  laskeTappio <- kustannusfunktio(n)
                 - kustannusfunktio(m)
                 - v(0,m)*vastuuvelka(m)
                 + v(0,n)*vastuuvelka(n)
  return(laskeTappio)
}

#simuloidaan polut mallille intensiteettimatriisilla Q
simulaatiot <- 100000
simuloidutTappiot <- matrix(nrow=simulaatiot, ncol=b+1)
for(i in 1:simulaatiot){
  polku <- sim.msm(Q, b)
  polkuTilat<- polku[[1]]
  polkuHetket<- polku[[2]]
  for(j in a+1:b){
    simuloidutTappiot[i,j]<- tappio(j-1,j)
  }
  simuloidutTappiot[i, b+1] <- tappio(0,b)
}
```